

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

VITESSE D'INDUCTION D'UN FILAMENT
TOURBILLONNAIRE RECTANGULAIRE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
NELSON ÉMOND

MAI 1997

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

REMERCIEMENTS

Une maîtrise: c'est une galère, qu'on se le dise. On s'y embarque par conviction et on rame, et on rame. On trime dans l'espoir d'atteindre un rivage dont on ne sait pas toujours où il se cache.

Il y a plusieurs personnes qui nous accompagnent dans ce périple et ils nous encouragent en nous disant qu'on est pas seul et cela nous aide à continuer. Sans eux, la galère deviendrait un enfer.

Naturellement, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont soutenu et aidé dans cette aventure, souvent difficile mais toujours stimulante. En fait, tous ceux qui y ont cru et qui m'ont aidé à persévérer.

Bouchard	Sylvain	Hamzaoui	Chérif	Parent	Ami(e)s
Chevalier	Jean	Lavallée	Paul	Riopelle	Pierre
Courcy	Xavier	Monteiro	Eva	Tousignant	Daniel
Autres					

Mot caché: on ne le dit jamais assez (5 lettres)

P	A	U	L	X	A	V	I	E	R	S
S	E	I	M	A	C	O	U	R	C	Y
R	I	O	P	E	L	L	E	C	D	L
E	E	R	R	E	I	P	M	H	R	V
I	L	A	V	A	L	L	E	E	A	A
L	T	N	E	R	A	P	V	R	H	I
A	E	S	E	R	T	U	A	I	C	N
V	D	A	N	I	E	L	R	F	U	A
E	C	M	O	N	T	E	I	R	O	E
H	A	M	Z	A	O	U	I	I	B	J
C	T	O	U	S	I	G	N	A	N	T

(Une pensée toute spéciale à mon père à qui je dédie ce mémoire.)

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES ABRÉVIATIONS	x
LISTE DES SYMBOLES	xi
RÉSUMÉ	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
FILAMENT TOURBILLONNAIRE	3
1.1 Théorème fondamental	3
1.2 Domaine de recherche	5
1.3 Revue de littérature	5
CHAPITRE II	
THÉORIE	18
2.1 Introduction	18
2.1.1 Biot-Savart	18
2.1.2 Concept d'induction localisée	19
2.1.3 Perturbation	21
2.1.4 Instabilité	23
2.2 Vitesse d'induction pour un filament rectangulaire	24
2.2.1 Méthode intégrale	24
2.2.2 Concept d'induction localisée	28
2.2.3 Induction de quatre filaments droits	31
2.3 Filament rectangulaire obtenu par une perturbation	35

2.3.1	Perturbations sous forme de série de Fourier	35
2.3.2	Perturbation par une onde en créneau	38
2.3.3	Perturbation ajustée	41
2.4	Distinction entre un filament rectangulaire et carré	47
CHAPITRE III		
EXPÉRIMENTATION		50
3.1	Montage	50
3.2	Induction	53
3.3	Scission du filament rectangulaire	57
CHAPITRE IV		
INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		61
4.1	Déformation d'un filament rectangulaire	61
4.2	Instabilité	63
4.3	Fragmentation	63
4.4	Similitude entre deux anneaux circulaires et un tourbillon généré par une fente rectangulaire	66
CONCLUSION		68
APPENDICE A		
FORMULE DE BIOT-SAVART		71
APPENDICE B		
VITESSE INDUITE		75
APPENDICE C		
PROPRIÉTÉS INVARIANTES		108
APPENDICE D		
PERTURBATION		115
APPENDICE E		
STABILITÉ D'UN ANNEAU CIRCULAIRE		143
LISTE DES RÉFÉRENCES		167

LISTE DES FIGURES

1.1	Gauche: Fil tourbillonnaire, Droite: Tubes tourbillonnaires engendrés par des lignes tourbillonnaires.	4
1.2	a) surface de séparation pour un fluide non-visqueux. b) cisaillement de la vitesse pour un fluide visqueux.	6
1.3	Générateur de tourbillons à l'aide d'un montage a) de type orifice et b) de type jet	7
1.4	Schéma du profil de la vitesse à la sortie du tube à l'aide d'un montage de type jet.	8
1.5	Les premières étapes dans la formation d'un anneau de tourbillon turbulent $Re \approx 41500$	9
1.6	Tourbillon à la sortie d'une fente rectangulaire, $Re \approx 8500$	10
1.7	Présence des deux phénomènes: formation de l'anneau par des gradients de pression et de vitesse ainsi que par l'instabilité.	10
1.8	Principe de l'induction en deux dimensions.	11
1.9	Tourbillon émergeant de la turbulence. Pulsation de 20 ms par intervalle de 85 ms.	13
1.10	Perturbation sinusoïdale de mode 2 sur un filament circulaire.	15
1.11	Perturbation sinusoïdale de mode 4 sur un filament circulaire.	15
2.1	De haut en bas: (a) $x^2 + 4^2y^2 = 1$, (b) $x^4 + 4^4y^4 = 1$ et (c) $x^8 + 4^8y^8 = 1$	25

2.2	Vitesse d'induction selon la position x et la variable n pour une surface $x_o \cdot y_o = 150$. Gauche: $\frac{x_o}{y_o} = 1.5$ où $x_o = 15$. Droite: $\frac{x_o}{y_o} = 2$ où $x_o = 17.4$	30
2.3	Vitesse d'induction selon différents rapports de x_o/y_o où $x_o = 15$	30
2.4	Filament rectangulaire et variables étudiées	31
2.5	Vitesse d'induction sur un filament rectangulaire par quatre sections de droites où $x_o = 15$ et $n = 2$	34
2.6	Réprésentation d'un filament de tourbillon perturbé en coordonnées cylindriques: a) perturbation radiale r et b) perturbation axiale ζ	36
2.7	Perturbation carrée de mode 2 sur un filament circulaire.	38
2.8	Déformation par la perturbation radiale $r(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$	42
2.9	Évolution de la déformation axiale $\zeta(\theta, t)$ engendrée par une perturbation en créneau pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$	42
2.10	Perturbation ajustée sur un filament circulaire afin d'obtenir un filament rectangulaire.	44
2.11	Déformation du filament rectangulaire par la perturbation radiale $r(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$	46
2.12	Évolution de la perturbation axiale $\zeta(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$	47
2.13	Représentation visuelle des rapports de x_o/y_o de la théorie entourant les critères de surface et de périmètre.	49
2.14	Choix du rapport de x_o/y_o qui distingue un filament rectangulaire d'un filament carré.	49
3.1	Photo du montage expérimental.	54

3.2	Distance parcourue par le haut-parleur en fonction du temps pour une ouverture de 6 cm^2	54
3.3	Formation d'un anneau de tourbillon par une ouverture rectangulaire, $1/30$ seconde par image, $Re \approx 3000$	55
3.4	Rotation de 90 degrés pour un filament rectangulaire.	58
3.5	Rotation de 45 degrés pour un filament carré.	58
3.6	Trainée qui accompagne un filament tourbillonnaire séparé en a) deux ou en b) trois.	60
4.1	Schéma de la déformation du filament tourbillonnaire rectangulaire de mode 2.	62
4.2	Nombre d'ondes (m) instable en fonction de \tilde{V} ; \times , expérience; \circ , prédiction théorique au maximum d'amplification	64
4.3	Schéma du mécanisme de séparation en 2 du filament tourbillonnaire rectangulaire.	65
4.4	Images expérimentales d'un tourbillon issu d'une fente rectangulaire comparées avec les images de la collision de 2 tourbillons obtenues par simulation.	67
B.1	Composantes d'un filament tourbillonnaire.	76
B.2	Croquis de la vitesse induite près d'une ligne de tourbillon. . . .	82
B.3	Vitesse d'induction au point $P(\xi, \eta)$ d'un filament de tourbillon courbe.	88
B.4	Vélocité induite sur un tourbillon parabolique.	92
B.5	Vélocité induite normalisée.	92
B.6	Surface engendrée par un filament courbe.	94
B.7	Vitesse induite initiale pour une perturbation gaussienne en fonction de x	97

B.8	Vitesse induite initiale pour une perturbation gaussienne en fonction de y/a	98
B.9	Vitesse induite initiale pour une perturbation sinusoïdale.	98
B.10	Vitesse induite initiale pour une perturbation sinusoïdale en fonction de $y/2a$	99
C.1	Surface par le produit de 2 vecteurs.	111
D.1	Nombre d'onde m sur un anneau circulaire.	120
D.2	Excentricité $e = \frac{\ MF\ }{\ MH\ }$ d'une ellipse : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	127
D.3	Vitesse induite initiale d'un anneau elliptique par rapport à l'axe majeur x	129
D.4	Vitesse induite initiale d'un anneau elliptique par rapport à l'axe mineur y	129
D.5	Période d'oscillation d'une ellipse en fonction de l'excentricité. . .	132
D.6	Représentation d'un anneau circulaire perturbé en coordonnées cylindriques.	134
D.7	Variation du rayon pour $m = 0$ et variation de la direction pour $m = 1$	138
D.8	Évolution des perturbations selon le mode $m = 2$ et selon le mode $m = 3$	141
E.1	Configuration et coordonnées du système pour une perturbation sinusoïdale sur un anneau de tourbillon circulaire.	144
E.2	Taux d'amplification spatiale ω_x en fonction de \tilde{V} et du mode m	161

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Déplacement (D) du haut-parleur en fonction de la tension (Volts) pour une ouverture de 6 cm^2 et $D_{eq}^* = 2.764\text{ cm}$	52
3.2	Vitesse d'induction expérimentale pour des ouvertures de 6 cm^2 . .	56
3.3	Comparaison de la vitesse d'induction expérimentale avec la vitesse théorique.	57
D.1	Conditions initiales d'un filament elliptique.	130
E.1	Valeurs des $G(m)$	153

LISTE DES ABRÉVIATIONS

Symbole	Définition	Unité
cte	Constante	—
$Ei(x)$	Fonction intégrale exponentielle	—
ms	10^{-3} seconde	s
rad	Radian	—
Re	Partie réelle	—
Re	Nombre de Reynolds = κ/ν	—
Ri	Nombre de Richarson	—
∞	Infini	—
\rightarrow	Tendre vers	—

LISTE DES SYMBOLES

Symbole	Définition	Unité
(gras)	Représente un vecteur	—
\mathcal{A}	Vecteur potentiel	m^2s^{-1}
\mathbf{B}	Vecteur unitaire suivant la binormale	—
D	Distance de déplacement du haut-parleur	mm
D_{eq}	Diamètre équivalent	cm
ds	Élément de longueur sur le filament de tourbillon	m
e	Excentricité	—
g	Constante gravitationnelle	ms^{-2}
I	Courant	Amp
m	Mode	—
\mathbf{N}	Vecteur unitaire suivant la normale	—
\mathbf{q}	Vecteur vitesse	ms^{-1}
R	Rayon de courbure	m
\mathcal{R}	Rayon de courbure équivalent	m
R_{app}	Rayon de courbure approximatif	m
R_{eff}	Rayon effectif	m
$r(\theta, t)$	Perturbation radiale	m
\mathbf{r}	Vecteur position	m
S_{fente}	Surface de la fente rectangulaire	cm^2
s	Longueur	m
T	Période	s

T	Vecteur unitaire suivant la tangente	—
t	Temps	<i>s</i>
t	Vecteur unitaire tangent à la courbe	—
$V_{1.7 \times 3.5}$	Vitesse à la sortie d'une fente de $1.7 \times 3.5 \text{ cm}$	cm s^{-1}
$V_{2 \times 3}$	Vitesse à la sortie d'une fente de $2 \times 3 \text{ cm}$	cm s^{-1}
V_{exp}	Vitesse moyenne expérimentale	cm s^{-1}
V_{h-p}	Vitesse du haut-parleur	cm s^{-1}
V_s	Vitesse à la sortie de l'ouverture	cm s^{-1}
V_{th}	Vitesse théorique	cm s^{-1}
x_o	Point de rencontre d'un filament fermé avec l'axe des <i>x</i>	—
y_o	Point de rencontre d'un filament fermé avec l'axe des <i>y</i>	—
δ	Angle de coupure	—
η	Coordonnée selon l'abscisse	—
γ	Constante d'Euler = 0.5772	—
κ	Circulation	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
ν	Viscosité cinématique = μ/ρ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ω	Fréquence	s^{-1}
ρ	Densité	kg m^{-3}
σ	Rayon du filament tourbillonnaire	<i>m</i>
φ	Angle d'excentricité	—
ς	Courbure = $1/R$	m^{-1}
τ	Torsion	m^{-1}
θ	Angle	<i>rad</i>
$\zeta(\theta, t)$	Perturbation axiale	<i>m</i>
ξ	Coordonnée selon l'ordonnée	—
Ω	Fréquence dans les séries de Fourier	s^{-1}
$\mathbf{\Omega}$	Vecteur rotationnel de la vitesse	s^{-1}

RÉSUMÉ

Ce mémoire a pour but de mieux comprendre l'induction et la déformation des filaments tourbillonnaires rectangulaires. L'originalité de ce document est d'avoir trouvé un développement théorique de la vitesse d'induction pour un filament rectangulaire et d'en expliquer la dynamique. Certains chercheurs ont fait une amorce expérimentale sur les filaments rectangulaires mais aucun des articles parus n'ont fourni un support mathématique pour expliquer l'induction. Nous avons complété par des expériences qui viennent confirmer notre théorie. Des explications supplémentaires sur l'origine et la destruction des filaments tourbillonnaires sont résumées.

La dynamique des tourbillons issus d'une ouverture rectangulaire est beaucoup plus complexe que ceux issus de formes plus simples comme le cercle ou l'ellipse. De plus, malgré qu'il ne soit pas fréquent de rencontrer des tourbillons rectangulaires dans la réalité, leur dynamique est très instructive quant à l'interaction des tourbillons. Nous décrivons les résultats d'expériences de génération de tourbillons rectangulaires et les méthodes utilisées. Nous montrons des images originales de ce type d'anneau et enfin, nous comparons avec des simulations numériques obtenues par d'autres chercheurs.

Nous terminons par la constatation de phénomènes intéressants qui se produisent lors de l'induction d'un filament rectangulaire. Dans certaines conditions bien déterminées, on voit que le filament rectangulaire se sépare en deux ou trois tourbillons circulaires. Ces phénomènes de scission s'expliquent par la présence de la viscosité qui dépasse le cadre de ce mémoire mais qui pourrait faire l'objet de recherches subséquentes.

INTRODUCTION

L'intérêt pour les filaments tourbillonnaires a pris naissance il y a plus d'un siècle. Depuis, maints articles et maints chercheurs ont essayé d'expliquer le processus de la formation, de la propagation ainsi que de la destruction des tubes tourbillonnaires. La première approche théorique sur les anneaux de tourbillons a été faite par Williams Thomson (Lord Kelvin, 1867) après la publication de l'article fondamental de Helmholtz (1858).

Les applications de la théorie des tourbillons sont très étendues et on les trouve à différentes échelles de grandeur. Lord Kelvin (1867) a émis l'idée que les tourbillons sont à l'échelle atomique. Plus près de nous, on retrouve les anneaux de tourbillons dans le domaine de l'ingénierie comme dans le forage sous-marin (Chahine et Genoux, 1983) ou encore dans la lutte contre le feu (Akhmetov, 1980). Les tourbillons générés sur le bout des ailes d'un avion en sont un autre exemple qui a beaucoup d'intérêt dans l'aéronautique (Crow, 1970; Moore et Saffman, 1971). Dans le domaine de la météo aéronautique, on a souvent rapporté des vents violents et subtils qui se développent sur les pistes d'atterrissage pouvant ainsi causer des écrasements. Ces vents ont les caractéristiques des anneaux de tourbillons. Certaines études, datant d'environ vingt ans, ont proposé d'utiliser des anneaux de tourbillons pour transporter des polluants à haute altitude grâce à leur propriété auto propulsive (Turner, 1960). On a récemment constaté, à l'aide de photos prises par satellites, des tourbillons bidimensionnels géants qui prennent naissance dans le détroit de Gibraltar et qui se propagent à des milliers de kilomètres dans l'océan Atlantique. Lors d'explosion de grande puissance, le champignon qui en résulte a une ressemblance évidente avec un anneau tourbillonnaire. On a même fait des études sur le son généré par l'interaction de deux anneaux (Minota et al, 1983, 1988). À l'échelle cosmique, les galaxies peuvent être considérées comme des tourbillons qui interagissent entre eux.

De plus, les tourbillons sont des acteurs importants dans la turbulence qui est un phénomène d'actualité ayant des applications dans le transport de quantité de mouvement, d'énergie et de diffusion. Nous nous limitons à l'étude des tourbillons ayant la forme particulière d'un rectangle. Cela n'empêche pas d'introduire d'autres formes qui nous seront utiles par la suite.

Plusieurs techniques sont possibles pour produire un anneau de tourbillons. La plus simple est de laisser tomber une goutte d'eau colorée dans une verre d'eau. Une version différente de la même expérience consiste à former une goutte au bout d'une burette et de l'approcher de la surface de l'eau. Au contact, un anneau de tourbillons se forme même si la gouttelette n'a pas d'énergie cinétique au départ. Cela indique que la tension de surface est une source importante d'énergie du mouvement rotationnel (Shariff et Leonard, 1992).

Des anneaux de tourbillons peuvent être formés à partir d'une plaque chauffante. L'air surchauffé monte en formant une structure tourbillonnaire circulaire. Ici, c'est la différence de température qui est à l'origine de l'anneau tourbillonnaire mais cela pourrait aussi se produire par une différence de pression et de vitesse. C'est cette technique de gradients de pression et de vitesse qui a servi pour la fabrication de nos tourbillons rectangulaires en laboratoire.

On a développé une théorie qui permet de déterminer la vitesse d'induction et la déformation d'un filament rectangulaire au cours du temps dans un fluide idéal. Jusqu'à présent, aucun article ne traite de cette théorie. Pour arriver à ces résultats, nous avons décortiqué les principaux articles concernant la théorie de l'induction, de la perturbation et de l'instabilité. Les techniques utilisées dans ces articles sont reprises pour l'élaboration de notre théorie du filament rectangulaire qui est appuyée par nos résultats expérimentaux. Notre théorie ne tient pas compte des phénomènes reliés à la viscosité comme par exemple la scission ou la reconnection d'un filament.

De nos expériences, nous constatons d'autres observations sur la formation et la destruction d'un filament rectangulaire. On a jugé judicieux de les joindre à ce mémoire car elles ajoutent à la compréhension générale du comportement des filaments tourbillonnaires.

CHAPITRE I

FILAMENT TOURBILLONNAIRE

Nous allons présenter une définition d'un filament tourbillonnaire et du théorème fondamental qui s'y rattache. Nous établissons une description des étapes de la vie d'un filament tourbillonnaire généré par le passage d'un fluide par une ouverture, de sa formation jusqu'à sa destruction. On y expose les principales théories acceptées, les expériences les plus pertinentes et enfin, les auteurs s'y rattachant.

1.1 Théorème fondamental

Une ligne (ou fil) tourbillonnaire est définie comme une courbe dans l'espace qui, à un instant t donné, possède en chacun de ses points une tangente au vecteur tourbillon $\boldsymbol{\Omega}$ (équation 1.1) ou \mathbf{v} est la vitesse. Les lignes tourbillonnaires peuvent engendrer des surfaces tourbillonnaires (figure 1.1) et, en particulier, des tubes tourbillonnaires (Ryhming, 1991). Le terme "vortex" a été introduit par Lord Kelvin. Ce terme est beaucoup utilisé dans la littérature anglaise et est équivalent au mot "tourbillon" en français.

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \tag{1.1}$$

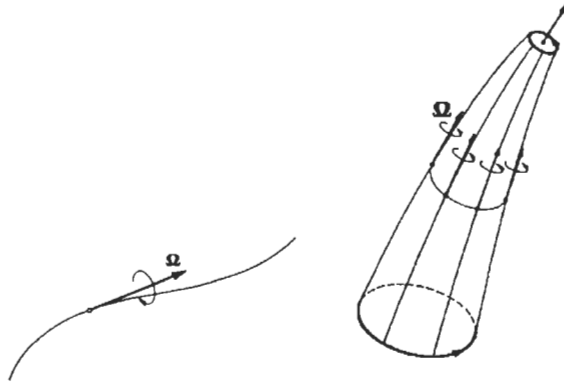


Figure 1.1: Gauche: Fil tourbillonnaire, Droite: Tubes tourbillonnaires engendrés par des lignes tourbillonnaires.

Lord Kelvin a émis un théorème qui affirme que l'intensité d'un tube tourbillonnaire est conservée dans un fluide non visqueux et barotrope. Une conséquence de ce théorème est qu'un filament tourbillonnaire est indestructible dans un fluide idéal. Le théorème de Kelvin-Helmholtz prévoit que les filaments tourbillonnaires ne prennent naissance ou ne disparaissent qu'aux frontières du fluide (par ex. Ryhming, 1991). Par conséquent, ils ne peuvent se présenter que sous trois formes:

- de longueur infinie, même dans un volume fini;
- en suivant des courbes fermées;
- en commençant et en se terminant aux surfaces-frontières du fluide.

Ce théorème est très important car il nous assure qu'un filament tourbillonnaire fermé dans un fluide idéal est éternel et se déplace à vitesse constante. Ainsi, une fois qu'un filament tourbillonnaire est formé, sa vitesse d'induction dépend exclusivement des caractéristiques du filament et non des paramètres du fluide environnant.

1.2 Domaine de recherche

L'éventail des sujets d'études sur les filaments tourbillonnaires est vaste. Les principaux domaines de recherches sur le sujet pourraient se schématiser comme suit:

- Formation
 - phase d'enroulement (“vortex sheet”)
 - décollement de la paroi
- Propagation
 - induction
 - perturbation
- Séparation et interaction
- Destruction
 - instabilité
 - viscosité

Dans la section qui suit, nous allons élaborer plus en profondeur sur chacun des items ci-haut mentionnés.

1.3 Revue de littérature

Formation

Tout fluide possède une viscosité qui lui est propre. La présence de cette viscosité est une condition essentielle pour expliquer la formation d'un filament tourbillonnaire. Sans elle, il n'y aurait pas de tourbillon possible. La figure 1.2 montre deux profils de vitesse dans un fluide avec et sans viscosité. Dans le cas où il

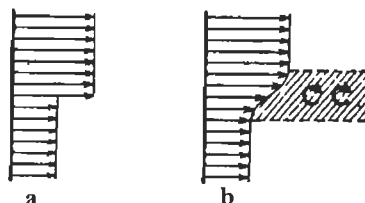


Figure 1.2: a) surface de séparation pour un fluide non-visqueux. b) cisaillement de la vitesse pour un fluide visqueux.

n'y a pas de viscosité, les deux couches de fluide glissent l'une sur l'autre sans interaction car il n'y a pas de frottement entre les molécules du fluide. Dans le cas où il y a de la viscosité, les molécules subissent des contraintes par la présence du gradient de vitesse. Cela a pour effet de déformer le profil de vitesse et de générer des tourbillons.

Les montages les plus utilisés pour la formation d'anneaux tourbillonnaires utilisent la propulsion d'un fluide à travers un orifice. Ces types de montages sont versatiles. Ainsi en modifiant la forme de l'orifice, on peut générer différents types d'anneaux selon les besoins de nos études. Ces montages existent sous forme de deux catégories: orifice et jet (figure 1.3).

Le processus de formation des tourbillons a été expliqué par Maxworthy (1972, 1974, 1977), dès le début des années 1970. D'autres articles ont suivi dont ceux de Pullin et Perry (1979, 1980) et de Blondeaux et De Bernardinis (1983). Dans l'article de Kruttsch (1939), on peut voir la formation d'un tourbillon secondaire dans la première étape de sa formation. Il s'intéressait surtout aux phénomènes de stabilité et du nombre d'onde spontanées qui apparaissent sur un filament circulaire. Cet article est souvent négligé mais il est parmi les plus importants dans le domaine de l'expérimentation. Il présente un schéma du profil de la vitesse à la sortie de l'ouverture et la vitesse maximale se trouve près des parois du tube lorsque le fluide est propulsé (figure 1.4). Ce schéma explique l'enroulement près de la paroi de l'ouverture donnant ainsi naissance au filament tourbillonnaire. Cet enroulement est justifié par l'effet conjoint de deux

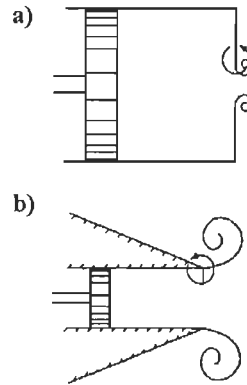


Figure 1.3: Générateur de tourbillons à l'aide d'un montage a) de type orifice et b) de type jet .

principes physiques. Le premier principe fait appel aux gradients de pression et de vitesse à la sortie de la fente. En effet, nous pouvons voir que le rayon du filament grossit jusqu'au moment où il n'y a plus de fluide qui l'alimente (figure 1.6). L'acceptation de ce principe nous permet d'avoir des anneaux de grosseur variable et ceci en contrôlant la durée de l'impulsion. Si la durée est très longue, l'anneau devient suffisamment gros et se décolle de la paroi en se déplaçant par sa propre induction.

L'autre principe, provient d'une instabilité similaire à celle de Kelvin-Helmoltz. En deux dimensions, celle-ci ne se produit que pour certaines caractéristiques de l'écoulement. Premièrement, il faut un cisaillement dans la vitesse d'écoulement. Deuxièmement, il faut satisfaire le critère de Rayleigh (réf. Kundu, 1990, p. 392), où il faut avoir un point d'inflexion dans le profil de la vitesse, Cela exige donc de considérer un fluide visqueux. Troisièmement, il ne faut pas un grand écart dans la densité des fluides pour satisfaire le critère de Richardson (Ri) qui est une mesure de la variation de la densité par rapport à la vitesse. Pour un fluide incompressible passant par une ouverture, le critère de Ri est naturellement satisfait. La première et la deuxième condition sont satisfaites dans les deux types

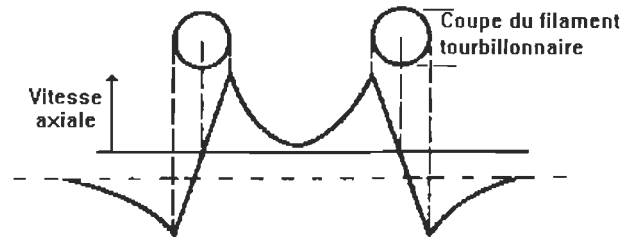


Figure 1.4: Schéma du profil de la vitesse à la sortie du tube à l'aide d'un montage de type jet.

de montages, orifice et jet (figure 1.2).

$$Ri \equiv -g \frac{\partial \rho / \partial z}{|\partial V / \partial z|^2}$$

- g : constante gravitationnelle
- ρ : densité
- V : vitesse horizontale perpendiculaire
à l'axe k

Ces deux phénomènes coexistent lors de la formation d'un anneau. La figure 1.7 utilise la technique des bulles d'hydrogène et permet une visualisation très fine de la présence de ces deux phénomènes. La prédominance d'un principe sur l'autre dépend beaucoup de Re et de la durée de l'impulsion. Pour de petits Re , la formation de l'anneau est principalement due au principe des gradients de pression et de vitesse. Par contre, c'est le principe de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui prédomine pour les grands nombres de Reynolds (figure 1.5). On remarque toutefois sur cette dernière figure que le filament tourbillonnaire ne se crée pas immédiatement à la sortie de l'ouverture mais légèrement plus loin. Ainsi, dès que l'anneau est formé, il s'éloigne de la paroi par induction et un autre anneau se forme derrière lui et ainsi de suite. Pour les cas intermédiaires, la forme générale est due aux gradients de pression et de vitesse et nous avons une instabilité qui se situe autour de la forme générale. Cette instabilité entraîne

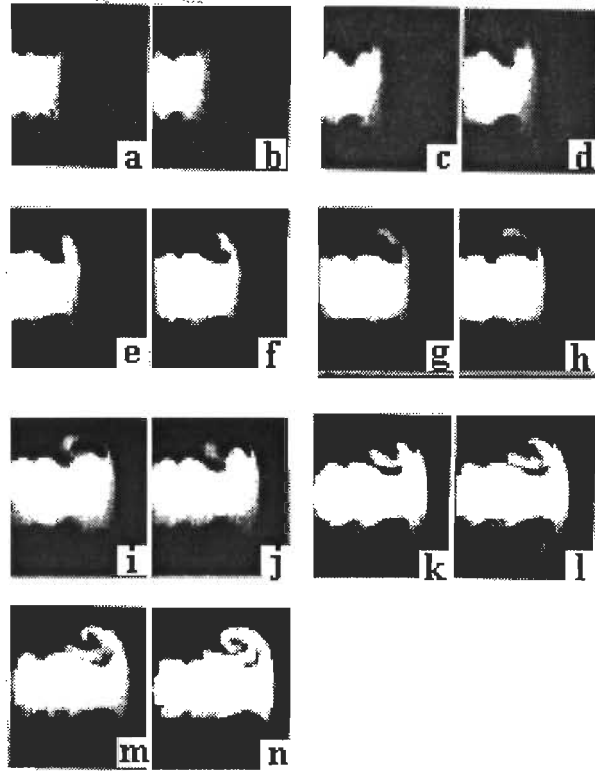


Figure 1.5: Les premières étapes dans la formation d'un anneau de tourbillon turbulent $Re \approx 41500$ (Glezer, 1988).

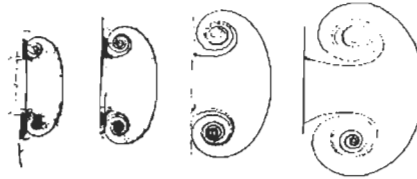


Figure 1.6: Tourbillon à la sortie d'une fente rectangulaire, $Re \approx 8500$ (Auerbach, 1987).

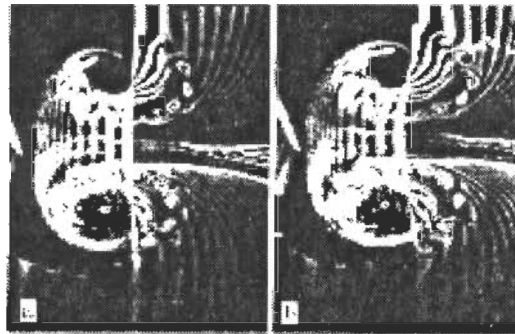


Figure 1.7: Présence des deux phénomènes: formation de l'anneau par des gradients de pression et de vitesse ainsi que par l'instabilité.

une partie du fluide extérieur inerte avec celui en rotation.

Induction

L'induction cause l'auto-propulsion d'un anneau. Un des premiers articles sur l'induction est de Lord Thomson (1867). Le concept d'induction se conçoit tel qu'illustré par la figure 1.8. Le tourbillon A pousse le tourbillon B et vice versa. Ce principe est apparenté à la loi de Biot-Savart en électromagnétisme. L'équivalent de cette loi en mécanique des fluides pour la vitesse d'induction (équation 1.2) est entièrement développée dans l'appendice A et s'écrit:

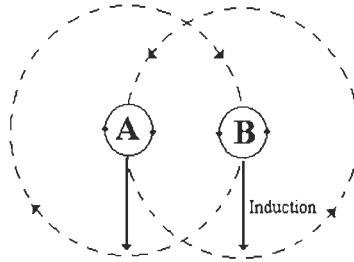


Figure 1.8: Principe de l'induction en deux dimensions.

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}) = \frac{-\kappa}{4\pi} \int_c \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (1.2)$$

- \mathbf{p} : un point sur le fil tourbillonnaire
- κ : circulation ($m^2 s^{-1}$)
- \mathbf{r} : vecteur qui joint le point \mathbf{p} à un autre point sur le fil tourbillonnaire
- $d\mathbf{s}$: élément de longueur du fil tourbillonnaire
 $\equiv \mathbf{t} ds$
- \mathbf{t} : vecteur tangent au fil tourbillonnaire

Plusieurs auteurs ont remanié l'équation 1.2, mais tous s'inspirent de cette même expression que nous utiliserons au moment de définir la vitesse d'induction pour un filament rectangulaire. Lamb en 1932 en a tiré une formulation sans intégrale qui est encore utilisée aujourd'hui pour déterminer la vitesse induite (équation 1.3) pour les anneaux circulaires. La vitesse d'induction est intimement liée à la structure du filament tourbillonnaire, c'est-à-dire à sa forme et à sa distribution de circulation. Lamb a développé sa formule pour la vitesse d'induction d'un anneau circulaire ayant une distribution de circulation d'un corps rigide.

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\kappa}{4\pi R} \left\{ \log \frac{8R}{\sigma} - \frac{1}{4} \right\} \quad (1.3)$$

- R : rayon moyen de l'anneau à partir de son centre

σ : rayon du tube tourbillonnaire

L'intérêt de l'induction a vraiment pris de l'ampleur à partir des années 1960 par les articles de Hama (1960, 1962, 1963, 1965). Il introduisit le "Concept d'induction localisée" qui consiste à établir un lien entre la vitesse d'induction et le rayon de courbure. Ce concept est une façon ingénieuse d'éviter la forme intégrale et facilite beaucoup les calculs (appendice B).

Les articles les plus intéressants dans le domaine de l'expérimentation sur la propulsion d'un simple anneau sont ceux de Maxworthy (1972, 1974, 1977). On y fait des constatations sur le comportement des tourbillons pour différents nombres de Reynolds. On y décrit également un accroissement du rayon d'un anneau avec le temps. On y explique la différence entre la vitesse induite théorique et expérimentale qui serait due au tourbillon secondaire qui entre en interaction avec le tourbillon principal ainsi qu'à une perte de circulation dans la trainée. Dans certains cas, suite à un anneau instable, il émerge un anneau stable avec une circulation nettement moindre qu'au commencement.

L'expérience de Didden (1979) a fait marque dans le domaine. Ses résultats expérimentaux sont encore utilisés comme base de plusieurs articles pour fins de comparaison. Cette expérience a été la première à vérifier les affirmations de Maxworthy en montrant l'existence d'une circulation négative lors de la formation d'un tourbillon par une ouverture circulaire. L'article de Auerbach (1987) a corroboré cette affirmation en ajoutant que la viscosité est aussi un facteur important. L'article de Nitsche et Krasny (1994) a repris les résultats de Didden dans une simulation numérique. On pourrait nommer également Sfeir (1979) et Tsuchiya et Horikoshi (1986) pour leur travaux expérimentaux sur les fentes rectangulaires.

Pour les expériences impliquant plusieurs anneaux, les articles de Glezer ont eu des résultats spectaculaires. En effet, on pouvait voir des structures cohérentes émerger d'un flux turbulent pour des nombres de Reynolds élevés (figure 1.9). McWilliams (1984) s'est aussi intéressé à ces observations.



Figure 1.9: Tourbillon émergeant de la turbulence. Pulsation de 20 ms par intervalle de 85 ms (Saffman, 1981).

D'autres se sont intéressés principalement à l'aspect théorique de l'induction comme Saffman (1970, 1978), Fraenkel (1973), Tung et Ting (1967), Batchelor (1987) et Lamb (1932, chap. 7). On y aborde des sujets tels que la viscosité, la circulation ainsi que des approches différentes pour déterminer la vitesse d'induction.

La simulation numérique s'intéresse surtout aux phénomènes se rapportant à la viscosité et aux comportements non linéaires des tourbillons. Le traitement par simulation n'est pas nécessaire en général pour comprendre l'induction d'un filament simple et peu d'auteurs s'y intéressent.

Perturbation

Dans un langage courant, une perturbation est une modification que l'on inflige à un filament circulaire. Cette modification se traduit par une fonction mathématique que l'on superpose à l'équation du cercle. Par exemple, un filament circulaire auquel on applique une perturbation sinusoïdale de mode 2 donne une "ellipse" (figure 1.10) et un mode 4 donne un "carré" (figure 1.11) où $r = r(\theta, t)$ est la perturbation radiale à $t = 0$.

Les premières études portant sur la perturbation sont celles de Lord Kelvin (1880). Ses études ne concernaient que les filaments circulaires. Plus récemment, les articles les plus pertinents sont ceux de Hama (1960, 1962, 1963, 1965), qui étudia différents types de perturbations appliquées à des filaments droits ainsi que sur des cercles.

Kambe (1971) a fait des essais expérimentaux intéressants pour différents types d'ouvertures à l'aide d'un montage de type orifice. Il proposa une description de la dynamique d'un anneau dans le temps et une approche théorique pour un anneau circulaire ayant une faible perturbation.

Il arrive très souvent qu'un filament perturbé oscille lorsque la perturbation n'est pas trop forte. Par contre, pour une forte perturbation, le filament se sépare ou perd beaucoup de son énergie au fluide environnant. Perturbation et instabilité sont des mots clés que l'on retrouve partout associés au mouvement d'oscillation d'un filament tourbillonnaire. La différence entre une simple perturbation et

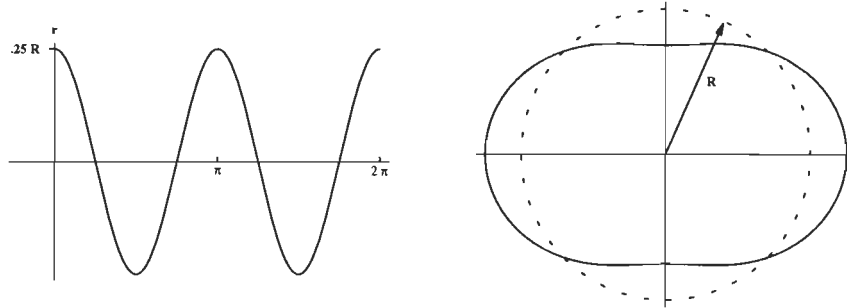


Figure 1.10: Perturbation sinusoïdale de mode 2 sur un filament circulaire.

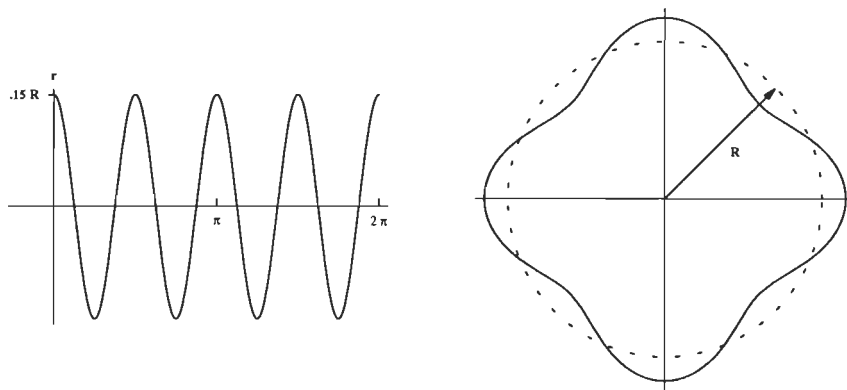


Figure 1.11: Perturbation sinusoïdale de mode 4 sur un filament circulaire.

l'instabilité est le taux d'amplification qui est nul pour un filament oscillant ou stable et non nul pour un filament instable.

Séparation et Interaction

Un filament tourbillonnaire peut se scinder en plusieurs anneaux au cours de son évolution. La raison principale en est la présence de la viscosité. Suite à une séparation, on observe un fil qui unit les anneaux de tourbillons, et ce fil est observé autant du côté expérimental que dans les simulations numériques.

L'expérience de Kambe (1971) a montré la scission d'un anneau en deux ou trois selon des conditions particulières. L'expérience de Fohl et Turner (1975) montre la collision de deux anneaux qui se joignent pour ensuite se séparer. Ils fournissent une première approche pour expliquer leurs observations. L'article de Voropayev et Afanasyev (1992) montre l'interaction de deux anneaux dans différentes conditions expérimentales. D'autres ont fait des simulations en deux dimensions sur l'interaction et la collision de deux anneaux (McWilliams et al., 1982, 1983, 1988). Plusieurs simulations en trois dimensions permettent de comprendre ce qui se passe lors de la fragmentation et la reconnection d'un filament (Melander et Hussain, 1989; Kida et al., 1989, 1991; Ishii, Kuwahara et Liu, 1993).

Lors de l'expérimentation, il est difficile de réaliser un montage qui montre la structure très fine d'un filament en trois dimensions. De plus, certains paramètres comme la circulation ou encore la pression ne sont disponibles que pour certains points du filament. Cette connaissance partielle ne permet pas d'expliquer le phénomène de scission ou de jonction adéquatement. La simulation, par contre, permet de connaître ces variables.

La viscosité est essentielle dans l'explication de la scission. Cependant, du point de vue théorique, si l'on tient compte de la viscosité, les équations deviennent non linéaires et insolubles analytiquement. Les approximations que nous devons faire s'avèrent trop grandes et font disparaître les termes non linéaires dont on voulait justement étudier le comportement. Seule l'intervention de simulations numériques parviennent à résoudre ces équations. Il n'est pas étonnant de constater que les articles les plus pertinents sur le sujet soient parus dans la dernière décennie.

Destruction

Il y a principalement deux causes à la destruction d'un filament tourbillonnaire: l'instabilité et la viscosité. Autant du côté expérimental que du côté théorique, les plus importants articles concernant la destruction d'un filament sont ceux de Maxworthy (1972, 1974, 1977); Widnall et Sullivan (1972); Widnall et al.

(1970, 1974); Kruttsch (1939); Saffman (1978). Ces derniers se sont intéressés à l'amplification d'une perturbation, au nombre d'onde, à l'impact de la viscosité sur l'instabilité ainsi qu'à la déformation du filament dans le temps.

Lorsqu'un filament est instable, il y a une perturbation qui survient et qui s'amplifie avec le temps. Après un court intervalle de temps, la perturbation est tellement grande qu'elle disloque l'anneau original. On associe à l'instabilité un nombre d'onde qui est en relation avec le nombre de Reynolds.

Pour sa part, la viscosité a un effet stabilisateur (Appel, 1959) sur l'anneau. La viscosité peut empêcher l'apparition de l'instabilité si elle est suffisamment grande ou si on est en présence de petits nombres de Reynolds. Mais à plus ou moins long terme, la viscosité dissipe la circulation de l'anneau avec le fluide environnant et parvient à anéantir le filament tourbillonnaire. Dans la plupart des cas, la viscosité ne fait que diminuer le taux d'amplification de l'instabilité et retarde la destruction du filament. Pour un nombre de Reynolds élevé, il y a apparition d'un mode instable qui croît rapidement et démolit le filament.

La destruction d'un anneau semble venir en contradiction avec le théorème de Kelvin-Helmholtz qui affirme qu'un filament de tourbillon est indestructible. Dans la réalité, on observe qu'un anneau a une durée de vie finie. L'affirmation de Kelvin-Helmholtz ne tient pas compte de la viscosité qui dissipe la circulation au cours du temps comme Macworthy l'a observée.

CHAPITRE II

THÉORIE

Dans ce qui suit, nous faisons un tour d’horizon des diverses théories sur les filaments de tourbillons. Nous utilisons différentes techniques pour déterminer la vitesse induite d’un filament rectangulaire et nous analysons sa déformation avec le temps. Pour la toute première fois, des équations explicites sont données dans l’étude des filaments rectangulaires. Nous allons aussi parler d’un critère de distinction entre un filament carré et rectangulaire.

2.1 Introduction

2.1.1 Biot-Savart

Les équations de base sont celles de Navier-Stokes bien connues en mécanique des fluides. À partir de ces équations, une expression est déduite pour la vitesse d’induction d’un filament tourbillonnaire dans le cas d’un fluide incompressible et non visqueux. Ce développement a été fait dans l’appendice A. L’équation résultante de la vitesse d’induction (équation 2.1) s’apparente à la loi de Biot-Savart en électromagnétisme.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds \quad (2.1)$$

Cette dernière équation est à la base de tout développement dans l'évaluation de la vitesse induite. Si elle a l'avantage d'être exacte, elle a le désavantage d'être très difficile à utiliser. Elle donne souvent des intégrales très complexes insolubles analytiquement. L'équivalent de l'équation 2.1 sous la forme polaire, développée par Batchelor, s'écrit comme:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{\kappa}{2\pi\sigma} [\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N}]}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{\kappa}{4\pi R} \left[\ln\left(2\frac{R}{\sigma}\right) \right]}_{\text{translation}} \mathbf{B} + O(\sigma) \quad (2.2)$$

Cette forme est moins utilisée que la précédente mais a un certain intérêt. La partie gauche de l'égalité comporte deux parties. La première représente la vitesse de rotation du filament tourbillonnaire sur lui-même. La deuxième partie est la vitesse de translation du filament. C'est cette dernière qui est la plus intéressante car elle est associée à la vitesse d'induction. La vitesse de translation ou d'induction est dans la direction de la binormale.

L'équation 2.2 a l'avantage de ne comporter aucune intégrale. Il faut par contre supposer que le rayon du filament tourbillonnaire est infime et négliger les effets à longue portée (appendice B).

2.1.2 Concept d'induction localisée

Afin d'illustrer l'utilisation de l'équation 2.1, on l'applique à l'équation simple d'une parabole $y = x^2$. Cette équation possède une solution analytique et présente des conclusions intéressantes. Après maints calculs (appendice B), l'expression de la vitesse induite pour un filament parabolique est:

$$\frac{4\pi q}{c\kappa} \approx \frac{2}{(4x^2 + 1)^{3/2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \varsigma \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\text{où } \varsigma = \frac{2}{(4x^2 + 1)^{3/2}}$$

Pour arriver à cette expression, il faut faire l'approximation que le rayon du

filament tourbillonnaire est extrêmement petit et négliger les effets à longue portée comme pour l'équation de Batchelor sous forme polaire.

La variable ς représente l'expression de la courbure locale d'une parabole. La variable σ correspond à la dimension du rayon du filament tourbillonnaire. Donc, la vitesse induite est proportionnelle à la courbure locale du filament tourbillonnaire. Maintenant, il est plus facile de calculer la vitesse d'induction pour n'importe quelle fonction en contournant le problème d'une intégration complexe. La courbure d'une fonction se calcule avec des dérivées. La vitesse induite pour une courbe peut être écrite, après une définition pertinente du temps et de la longueur, à l'aide de l'équation 2.3 qui a été démontrée dans l'appendice B (équation B.4, p. 78).

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{(\partial \mathbf{r} / \partial s) \times (\partial^2 \mathbf{r} / \partial s^2)}{|\partial \mathbf{r} / \partial s|^3} \quad (2.3)$$

Il faut que la fonction soit lisse et qu'elle possède des dérivées d'ordre supérieur. Cette approche pour déduire la vitesse induite a été nommée le "Concept d'induction localisée" et a été introduit par Hama (1962). Le terme "localisée" vient du fait que les effets à longue portée sont négligés. Malgré les approximations nécessaires à son application, ce concept donne d'excellents résultats. Ce concept est très intéressant car les endroits de courbure plus forte ont les vitesses induites plus élevées. Donc, la simple visualisation d'une courbe donne une bonne idée du comportement du filament tourbillonnaire dans le temps. Ce concept est aussi utilisé pour d'autres formes de courbes comme l'exponentielle et la sinusoïde (appendice B). Il faut noter que les courbes étudiées jusqu'à maintenant ne sont pas fermées. Pour de faibles amplitudes, ces courbes peuvent être perçues comme des perturbations sur un filament droit.

Un traitement strictement géométrique peut être utilisé pour trouver la courbure d'une fonction. Cette manière de faire ne demande aucune dérivation et aucune intégration. Elle est aussi très utile pour une approche numérique.

Les filaments tourbillonnaires fermés sur eux-mêmes possèdent certains invariants dans le temps qu'il est avantageux de connaître pour comprendre la

déformation du filament durant son induction. Ces deux invariants sont:

- La longueur du filament reste constante dans le temps.
- La surface fermée projetée du filament reste constante dans le temps.

Ils sont démontrés dans l'appendice C. Ces invariants impliquent que les endroits de forte courbure engendrent une courbure dans d'autres plans que celui de la propagation et ceci affecte le comportement du filament par la suite. L'impact de ces invariants est négligeable pour les anneaux circulaires. Ce n'est cependant pas le cas pour les anneaux rectangulaires car une déformation appréciable du filament est observée dans les autres plans que celui de la propagation. Le phénomène d'oscillation observé dans plusieurs cas est expliqué par l'invariance de la longueur et de la surface du filament.

2.1.3 Perturbation

En général, l'équation 2.3 est non-linéaire et difficile à résoudre analytiquement. Un des rares cas où il existe une solution analytique complète est présentée à l'appendice B pour un filament parabolique. Ce type de filament sert donc de base pour s'initier à la théorie des perturbations.

La parabole ($y = x^2$) peut se concevoir comme une perturbation sur une ligne droite. La courbure maximale se trouve au point $x = 0$. Au cours du temps, ce point diminue de courbure au profit des points adjacents de chaque côté. Cela montre un déplacement de la courbure vers les deux bras de la parabole.

Les autres perturbations choisies sont la sinusoïde et la gaussienne. Ces deux types de perturbations rejoignent un large éventail de filaments tourbillonnaires. Pour des perturbations de faible amplitude, on peut linéariser les équations qui définissent le filament tourbillonnaire. Au fur et à mesure que l'amplitude des perturbations augmente, les effets non linéaires deviennent prédominants et le comportement du filament tourbillonnaire se complique. Le filament tourbillonnaire se déforme différemment selon l'amplitude de la perturbation.

Une perturbation gaussienne sur un filament droit a approximativement le même comportement qu'une perturbation parabolique et les mêmes conclusions s'appliquent. Il y a un mouvement en hélice du filament dans le sens inverse de la rotation du filament lorsque la perturbation est sinusoïdale (équation B.38).

Suite à l'application d'une perturbation sinusoïdale de faible amplitude sur le cercle, il y a deux cas possibles à analyser selon la valeur du nombre d'onde (m). Si le nombre d'onde n'est pas un entier, le filament tourbillonnaire ne peut pas se refermer sur lui-même. Le rayon de la perturbation augmente indéfiniment avec le temps comme pour le filament parabolique. Un rayon qui augmente implique que la courbure locale diminue. Cela provoque une instabilité qui ne conserve pas la longueur du filament invariante et il faut s'attendre à ce que l'anneau se disloque. Pour les nombres d'onde entiers, le filament tourbillonnaire se referme sur lui-même. Dans ce cas, le rayon de courbure oscille constamment plus ou moins rapidement selon le mode qui lui est associé. La période d'oscillation T est fonction du nombre d'onde m et plus le mode est élevé et plus le filament oscille rapidement. Cette relation entre la période et le mode est déduite dans l'appendice D à l'aide de l'équation D.19 (p. 121).

$$T = 2\pi \frac{R}{m(m^2 - 1)^{1/2}} \quad (2.4)$$

Un filament elliptique est obtenu en posant une perturbation sinusoïdale de mode 2 sur un filament circulaire. Ce cas est particulièrement intéressant car il se rapproche d'un filament rectangulaire. Puisqu'on a un mode entier, la théorie prévoit que l'anneau elliptique oscillera indéfiniment. Plus l'excentricité s'approche de l'unité et plus l'ellipse est aplatie. La période T ne dépend que du mode m et du rayon R dans les équations linéarisées. On sort du domaine des petites perturbations lorsque la période du filament tourbillonnaire dépend également de l'excentricité. Ainsi, nous demeurons dans le domaine des petites perturbations tant que l'excentricité est inférieure à 0.82 (réf. appendice D). En d'autres termes, tant que le rapport de $1 \leq x_o/y_o \leq 1.74$ où x_o et y_o sont les points où l'ellipse coupe l'axe des x et des y respectivement. La théorie est valable jusqu'à cette limite. Cette frontière entre une perturbation faible et

forte pour l'ellipse est nécessaire car nous avons des interprétations différentes selon la valeur de l'excentricité ($0 \leq e \leq 1$). Pour les valeurs supérieures d'excentricité, il est difficile de faire une théorie qui reflète la réalité. Pour de faibles valeurs d'excentricité, le filament elliptique reprend sa forme originale après chaque période. Pour des excentricités qui s'approchent de l'unité, le filament oscille aussi mais ne reprend pas sa forme originale et par conséquent, l'ellipse n'oscille plus selon la période montrée par l'équation 2.4.

2.1.4 Instabilité

Cette section a pour but l'étude des filaments tourbillonnaires fermés qui ont des perturbations de modes entiers. Jusqu'à présent, ces perturbations appliquées sur un anneau circulaire, avaient pour effet de le faire osciller ou de le déformer sous sa propre induction. Mais, il s'avère qu'un anneau de tourbillons dans un fluide idéal est presque toujours instable pour un anneau circulaire même lorsque le mode est entier. C'est-à-dire que les perturbations prennent de l'amplitude avec le temps et provoquent presque toujours la destruction de l'anneau. Il y a des modes m privilégiés qui apparaissent spontanément lorsqu'un fluide est propulsé par une ouverture circulaire selon le rayon du filament σ . Le nombre d'onde m qui apparaît est inversement proportionnel au rayon σ du filament tourbillonnaire $m \approx 1/\sigma$. Ces résultats sont présentés en appendice E et sont dérivés de l'article de Widnall et Sullivan (1972).

Le taux d'amplification normalisé $\bar{\alpha}$ est défini par l'équation 2.5 qui relie $\bar{\alpha}$ avec le nombre d'onde m sur l'anneau. Un mode élevé a une plus grande amplification et la durée de vie de l'anneau en est d'autant diminuée.

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{4} \ln(m) \quad (2.5)$$

2.2 Vitesse d'induction pour un filament rectangulaire

Nous utilisons maintenant les outils développés dans la section précédente pour solutionner les problèmes qui font l'objet de ce mémoire, soit le déplacement et l'évolution d'un filament rectangulaire.

Nous définissons le filament rectangulaire initial dans le plan xy et sans composante selon l'axe z . Nous avons développé trois méthodes distinctes pour déterminer la vitesse d'induction d'un filament rectangulaire. La première approche est la méthode de l'intégrale (section 2.2.1) qui ne donne pas une équation soluble analytiquement. Afin de résoudre l'intégrale, nous la simplifions en procédant à l'analyse du comportement asymptotique de cette fonction. Ceci ne donne pas une solution exacte mais vaut la peine d'être mentionné.

La deuxième méthode fait appel au concept d'induction localisée (section 2.2.2). Cette méthode exige que les dérivées d'ordres supérieurs existent. Il nous faut définir un filament sans discontinuité et lisse. On obtient une solution analytique par cette méthode de la vitesse d'induction.

Dans la troisième, nous séparons le filament tourbillonnaire en quatre segments droits (section 2.2.3). On utilise, essentiellement, la loi de Biot-Savart (équation A.5, p. 74). Cette dernière nous donne la solution la plus intéressante des trois.

2.2.1 Méthode intégrale

Pour amorcer notre étude d'un filament tourbillonnaire rectangulaire, nous prenons une fonction de la forme:

$$\left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{y_o}\right)^{2n} = 1 \quad (2.6)$$

Les constantes x_o et y_o sont les points où le filament coupe l'axe des x et l'axe des y . L'équation 2.6 est continue et lisse pour n'importe quelle valeur de

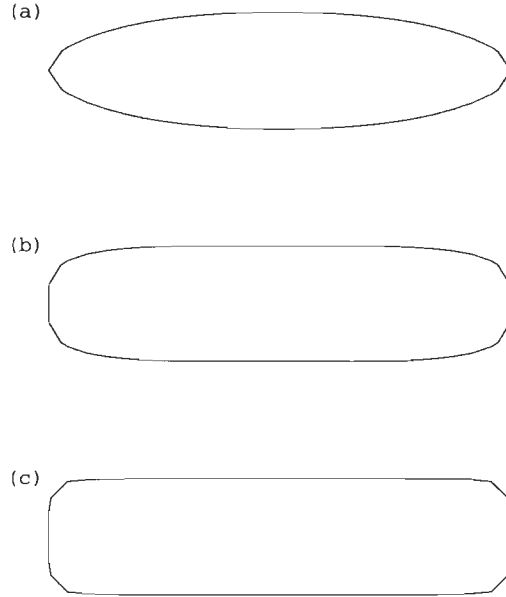


Figure 2.1: De haut en bas: (a) $x^2 + 4^2y^2 = 1$, (b) $x^4 + 4^4y^4 = 1$ et (c) $x^8 + 4^8y^8 = 1$.

n . Lorsque la valeur de n est positive et entière cela donne automatiquement un filament fermé. Plus la valeur de n augmente, plus la forme se rapproche à celle d'un rectangle (figure 2.1). Pour $n = 1$, il s'agit de l'ellipse qui est bien connue. Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé dans le traitement mathématique.

Pour évaluer la vitesse induite, il nous faut trouver le vecteur unitaire tangent \mathbf{t} et le vecteur rayon \mathbf{r} à un point quelconque $x = \xi$ pour l'équation 2.6. On pose $\partial/\partial x \equiv'$ pour simplifier l'écriture.

$$\begin{aligned} y &= y_o \left[1 - \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} \\ y_\xi &= y_o \left[1 - \left(\frac{\xi}{x_o} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} \\ x' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{y_o}{x_o} \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}-1} \\
ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dx \\
&= \sqrt{1 + y'^2} dx \\
\mathbf{t} &= \frac{x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\
&= \frac{\mathbf{i} + y' \mathbf{j}}{\sqrt{1 + y'^2}} \\
\mathbf{r} &= (\xi - x) \mathbf{i} + (y_\xi - y) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\
r^3 &= [(\xi - x)^2 + (y_\xi - y)^2]^{3/2}
\end{aligned}$$

Tous les éléments sont présents pour trouver la vitesse induite.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \times \mathbf{r} ds &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & y' & 0 \\ \xi - x & y_\xi - y & 0 \end{vmatrix} dx \\
&= ([y_\xi - y] - y'[\xi - x]) dx \mathbf{k}
\end{aligned}$$

L'argument de l'intégrale dans la formule de Biot-Savart 2.1 est:

$$\frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds = \frac{\left\{ y_o \left[1 - \left(\frac{\xi}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}} - y_o \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}} + \frac{y_o}{x_o} \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}-1} (\xi - x) \right\}}{\left\{ (\xi - x)^2 + y_o^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\xi}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}} - \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}} \right\}^2 \right\}^{3/2}} dx \mathbf{k} \quad (2.7)$$

Cette expression est très difficile à intégrer. De plus, il y a une singularité en $x = \xi$. Nous séparons l'intégrale de part et d'autre du point de singularité.

$$\frac{4\pi \mathbf{q}}{\kappa} = \int_{-x_o}^{\xi-\sigma} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds + \int_{\xi+\sigma}^{x_o} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds \quad (2.8)$$

Nous obtenons la forme générale de l'intégrale de Biot-Savart pour la vitesse d'induction pour ce filament en remplaçant l'argument par l'équation 2.7. Le rayon du filament tourbillonnaire est représenté par σ qui est infiniment petit.

L'équation 2.8 ne peut pas être résolue directement. Il faut faire un traitement asymptotique pour espérer réussir à résoudre cette intégrale analytiquement. On sait que $n \rightarrow \infty$ est le cas que l'on désire pour le filament rectangulaire. En utilisant le comportement asymptotique et les simplifications qui suivent, il sera possible de trouver une solution à l'équation 2.8.

$$\begin{aligned}
Q &= \left[1 - \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}-1} \\
\ln Q &= \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \ln \left[1 - \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right] \\
&\simeq \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left[- \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} - \frac{\left(\frac{x}{x_o} \right)^{4n}}{2} + \dots \right] \\
&\simeq \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \quad [n \rightarrow \infty] \\
\left[1 - \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}-1} &\simeq e^{\left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n}} \\
&\simeq 1 + \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \simeq 1 \quad [n \rightarrow \infty, x \neq \pm x_o] \\
&\simeq \infty \quad [x \rightarrow \pm x_o] \\
\left[1 - \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} &\simeq 1 \quad [n \rightarrow \infty, x \neq \pm x_o] \\
&\simeq 0 \quad [x \rightarrow \pm x_o]
\end{aligned}$$

Évaluation de l'intégrale

On substitue les approximations ci-haut dans l'équation 2.7.

$$\frac{4\pi \mathbf{q}}{\kappa} \simeq \frac{y_o}{x_o} \int_{-x_o}^{\xi-\sigma} \frac{\left[\left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n-1} \left[1 + \left(\frac{x}{x_o} \right)^{2n} \right] (\xi - x) \right]}{[(\xi - x)^2]^{3/2}} dx \mathbf{k} +$$

$$\frac{4\pi\mathbf{q}}{\kappa} \simeq \frac{y_o}{x_o} \int_{\xi+\sigma}^{x_o} \frac{[\left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1} [1 + \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}](\xi - x)]}{[(\xi - x)^2]^{3/2}} dx \mathbf{k} + \frac{y_o}{x_o} \int_{-x_o}^{\xi-\sigma} \frac{\left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1}}{(\xi - x)^2} dx \mathbf{k} \quad (2.9)$$

Pour toute valeur de $x \neq \pm x_o$, l'équation 2.9 est nulle car $\left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1} \equiv 0$ lorsque n tend vers l'infini.

$$\boxed{\frac{4\pi\mathbf{q}_{|x|\neq x_o}}{\kappa} = 0 \mathbf{k} \quad \text{pour } n \rightarrow \infty}$$

Et pour $|x| \rightarrow x_o$ la vitesse induite est infinie. Pour $|x| = x_o$ la vitesse induite est indéfinie.

$$\boxed{\frac{4\pi\mathbf{q}_{|x|\rightarrow x_o}}{\kappa} = \infty \mathbf{k} \quad \text{pour } n \rightarrow \infty}$$

Donc, la vitesse induite se situe aux extrémités du filament et est nulle ailleurs. On voit que ces valeurs de la vitesse induite ne sont pas révélatrices de la réalité. Les approximations utilisées sont trop fortes. Mais sans ces approximations, il est impossible d'obtenir une forme intégrale qui soit soluble analytiquement. Cette tentative a été infructueuse mais montre la difficulté de la forme intégrale.

2.2.2 Concept d'induction localisée

Le concept d'induction localisée établit un rapport direct entre la courbure ς d'un filament tourbillonnaire et la vitesse induite (appendice B). Il s'agit donc de trouver la courbure de l'équation 2.6. Pour un filament défini dans le plan xy , il y a déjà une équation qui évalue ce rayon de courbure directement (équation B.8, p. 81):

$$\varsigma = \frac{1}{R} = \frac{|f'g'' - g'f''|}{[f'^2 + g'^2]^{3/2}}$$

On pose $f = x$, $g = y$ et $' = \partial/\partial x$.

$$\begin{aligned} f' &= 1 \\ f'' &= 0 \\ g' &= -\frac{y_o}{x_o} \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-1} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}-1} \\ g'' &= -\frac{y_o}{x_o^2} (2n-1) \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-2} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}-2} \end{aligned}$$

Donc, la courbure s'écrit:

$$\boxed{\zeta = \frac{\frac{y_o}{x_o^2} (2n-1) \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n-2} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}-2}}{\left[1 + \left(\frac{y_o}{x_o}\right)^2 \left(\frac{x}{x_o}\right)^{4n-2} \left[1 - \left(\frac{x}{x_o}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{n}-2}\right]^{\frac{3}{2}}}} \quad (2.10)$$

L'équation 2.10 est un peu hermétique car les points du maximum d'induction sont difficilement visibles mais elle a l'avantage de n'avoir subi aucune approximation. La variation de la courbure en fonction de la position x et de la variable n est présentée à la figure 2.2. Sur cette figure, la vitesse induite est nettement plus élevée aux extrémités que sur le reste du filament. Cette tendance s'accroît lorsque la valeur de n augmente et lorsque le rapport de x_o/y_o augmente. La figure 2.3 montre la variation de la vitesse induite pour différents rapports x_o/y_o . Ainsi, plus ce rapport est élevé et plus la vitesse induite se concentre sur les extrémités du filament.

On vérifie l'exactitude de l'équation 2.10 pour le cas d'un cercle de rayon unitaire en posant $x_o = 1$, $y_o = 1$ et $n = 1$. Pour ce cas, la vitesse d'induction est une constante et elle est indépendante de la coordonnée x . Naturellement, la courbure ζ est constante pour un cercle.

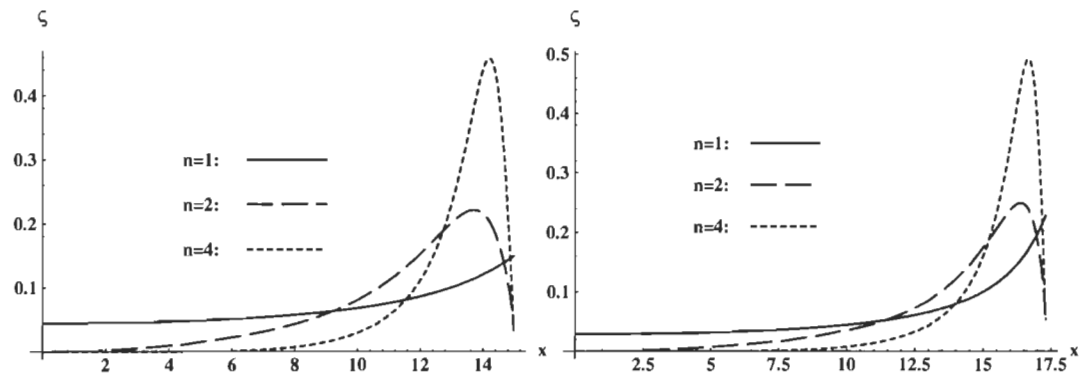


Figure 2.2: Vitesse d'induction selon la position x et la variable n pour une surface $x_o \cdot y_o = 150$. Gauche: $\frac{x_o}{y_o} = 1.5$ où $x_o = 15$. Droite: $\frac{x_o}{y_o} = 2$ où $x_o = 17.4$.

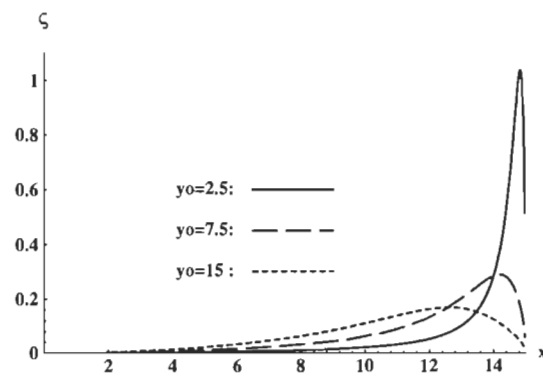


Figure 2.3: Vitesse d'induction selon différents rapports de x_o/y_o où $x_o = 15$.

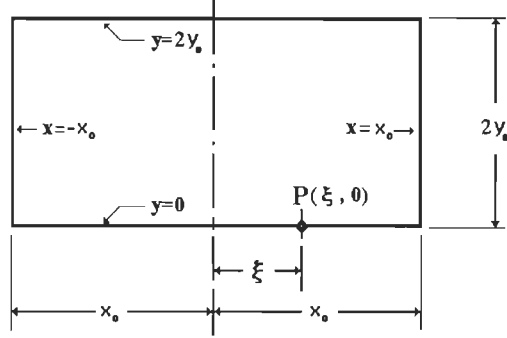


Figure 2.4: Filament rectangulaire et variables étudiées

2.2.3 Induction de quatre filaments droits

Dans ce cas, la méthode intégrale de Biot-Savart est utilisée pour déterminer la vitesse d'induction car le fait de considérer des filaments droits évite d'avoir des intégrales compliquées. Un schéma de la forme rectangulaire est présenté à la figure 2.4. Cette méthode a le désavantage de ne pouvoir nous donner la vitesse d'induction aux quatre coins qui forment un angle droit car ce sont des points singuliers ne possédant pas de dérivées définies. Par contre, elle est valable pour tous les autres points. L'induction est évaluée au point $P(\xi, 0)$ en déterminant la contribution de chacun des quatre segments de droites du rectangle.

Contribution de la droite $y = 2y_o$

Déterminons les vecteurs nécessaires à l'évaluation de l'intégrale de Biot-Savart.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\
 \mathbf{r} &= (\xi - x)\mathbf{i} + (0 - 2y_o)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\
 r^3 &= [(\xi - x)^2 + (2y_o)^2]^{3/2} \\
 &= [(x - \xi)^2 + (2y_o)^2]^{3/2} \\
 ds &= dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \xi - x & -2y_o & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2y_o \mathbf{k} \\
\mathbf{t} \times \mathbf{r} ds &= -2y_o dx \mathbf{k} \\
\frac{4\pi q_{y=2y_o}}{\kappa} &= -2y_o \int_{x_o}^{-x_o} \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (2y_o)^2]^{3/2}} dx \\
&= 2y_o \int_{-x_o}^{x_o} \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (2y_o)^2]^{3/2}} dx
\end{aligned}$$

L'évaluation de cette intégrale est assez simple et nous en donnerons seulement le résultat final.

$$\boxed{\frac{4\pi q_{y=2y_o}}{\kappa} = \frac{\frac{x_o - \xi}{2y_o}}{[(x_o - \xi)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}} + \frac{\frac{x_o + \xi}{2y_o}}{[(x_o + \xi)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}}} \quad (2.11)$$

Contribution des droites $x = \pm x_o$

Nous procédons de la même manière que précédemment.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= 0\mathbf{i} \pm \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\
\mathbf{r} &= (\xi \mp x_o)\mathbf{i} + (0 - y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\
r^3 &= [(\xi \mp x_o)^2 + y^2]^{3/2} \\
&= [(x_o \mp \xi)^2 + y^2]^{3/2} \\
ds &= \pm dy \\
\mathbf{t} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \xi \mp x_o & -y & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x_o \mp \xi) \mathbf{k} \\
\mathbf{t} \times \mathbf{r} ds &= (\pm x_o - \xi) dy \mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\frac{4\pi q_{x\pm x_o}}{\kappa} = \int_0^{2y_o} \frac{x_o \mp \xi}{[(x_o \mp \xi)^2 + y^2]^{3/2}} dy$$

Le résultat final de ces segments de droite est:

$$\boxed{\frac{4\pi q_{x\pm x_o}}{\kappa} = \frac{\frac{2y_o}{x_o \mp \xi}}{[(x_o \mp \xi)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}}} \quad (2.12)$$

Contribution de la droite $y = 0$

La contribution de cette partie est nulle car le vecteur $\mathbf{t} = -\mathbf{i}$ est parallèle à $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i}$ et donne un produit vectoriel nul.

$$\boxed{\frac{4\pi q_{y=0}}{\kappa} = 0} \quad (2.13)$$

Vitesse induite de toutes les parties

La vitesse induite au point $P(\xi, 0)$ est la somme vectorielle de toutes les contributions. Le changement de variable $\xi = x$ illustre la vitesse induite en fonction de la position (x) . Cette vitesse est dirigée dans la direction \mathbf{k} .

$$\boxed{\frac{4\pi q(x, 0)}{\kappa} = \frac{\frac{x_o - x}{2y_o} + \frac{2y_o}{x_o - x}}{[(x_o - x)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}} + \frac{\frac{x_o + x}{2y_o} + \frac{2y_o}{x_o + x}}{[(x_o + x)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}}} \quad (2.14)$$

Cette équation est un résultat beaucoup plus intéressant que celui obtenu par la première méthode qui demandait des approximations très fortes et qui, en plus, n'était pas précise. L'équation 2.14 est plus simple que celle obtenue par la deuxième méthode 2.10 et décrit bien la contribution de chacun des filaments individuellement. La figure 2.5 montre la vitesse d'induction pour différentes valeurs de y_o lorsque x_o est constant. Ainsi, la vitesse d'induction est surtout concentrée

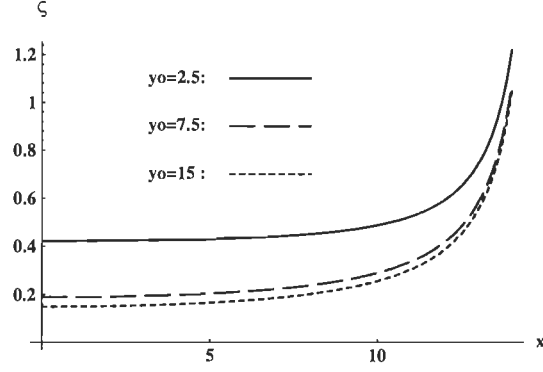


Figure 2.5: Vitesse d'induction sur un filament rectangulaire par quatre sections de droites où $x_o = 15$ et $n = 2$.

aux extrémités du filament lorsque le rapport x_o/y_o augmente. L'induction augmente à mesure que la valeur de x tend vers la valeur maximale x_o . La valeur minimale de la vitesse d'induction se trouve au point $P(0,0)$ ou au point $P(0,2y_o)$ qui ont la même valeur par symétrie.

Une équation à peu près similaire a été développée par Hama (1960) pour le champ magnétique induit par un courant dans un fil de forme rectangulaire (équation 2.15). Essentiellement, elle est équivalente à l'équation 2.14 qui correspond à la vitesse d'induction d'un filament rectangulaire en mécanique des fluides.

$$B(x,0) = \frac{\mu I}{4\pi(2y_o)} \left\{ \frac{(x_o + 2y_o) - x}{[(x_o - x)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}} + \frac{(x_o + 2y_o) + x}{[(x_o + x)^2 + (2y_o)^2]^{1/2}} \right\} \quad (2.15)$$

2.3 Filament rectangulaire obtenu par une perturbation

Jusqu'à maintenant, on a déterminé la vitesse induite pour un filament rectangulaire par différentes méthodes. Mais, il serait pertinent de savoir comment le filament se déforme lorsqu'il se déplace dans le temps. Nous utilisons la technique des perturbations. On peut décomposer la forme d'un filament tourbillonnaire en deux parties: une forme générale (ligne, cercle) et une perturbation. Ainsi, par le choix judicieux d'une perturbation, une forme spécifique peut être générée. Donc, en posant une perturbation appropriée sur un cercle, un filament rectangulaire est fabriqué. La difficulté est de trouver la perturbation qui nous permet d'obtenir un tel filament. Nous allons définir ici deux de ces types de perturbations qui sont acceptables. Dans un premier temps, nous utilisons une perturbation en créneau de mode 2 et dans un second temps, nous choisissons une perturbation qui sera ajustée afin de correspondre à un filament rectangulaire. De plus, en choisissant un rapport de $x_o/y_o \leq 1.74$ (appendice D), cela nous assure d'être dans le domaine des faibles perturbations.

2.3.1 Perturbations sous forme de série de Fourier

Les perturbations utilisées sont des fonctions périodiques qui viennent perturber un filament circulaire. La forme initiale de la perturbation radiale $r(\theta, 0)$ ainsi que celle de la perturbation axiale $\zeta(\theta, 0)$ (figure 2.6) peuvent être décomposées en une série de Fourier sous la forme:

$$\begin{aligned}
 r(\theta, 0) \equiv r(\theta) &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega\theta) + b_n \sin(n\Omega\theta) \\
 \zeta(\theta, 0) \equiv \zeta(\theta) &= 0 \\
 a_o &= \frac{2}{T} \int^T r(\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int^T r(\theta) \cos(n\Omega\theta) d\theta \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int^T r(\theta) \sin(n\Omega\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

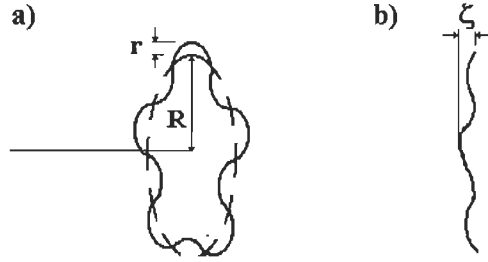


Figure 2.6: Représentation d'un filament de tourbillon perturbé en coordonnées cylindriques: a) perturbation radiale r et b) perturbation axiale ζ .

Les séries de Fourier représentent un système linéaire. Afin d'obtenir un filament rectangulaire, on choisit une perturbation radiale initiale paire ($b_n = 0$) et périodique sur une période T de π . En choisissant une valeur appropriée du rayon R , il sera possible d'annuler la valeur de a_0 qui simplifiera l'écriture des équations.

$$\begin{aligned}
 r(\theta, 0) \equiv r(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\theta) \\
 \zeta(\theta, 0) \equiv \zeta(\theta) &= 0 \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int^T r(\theta) \cos(n\Omega\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad T = \pi
 \end{aligned}$$

L'évolution de la perturbation radiale avec le temps peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 r(\theta, t) &= \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\theta) e^{i\omega_n t} \right] \\
 r(\theta, t) &= \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\theta) \{ \cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t) \} \right] \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Un développement de l'équation d'onde générale en coordonnées polaires pour la perturbation radiale $r(\theta, t)$ apparaît en appendice D par l'équation D.12 (p. 118). Connaissant l'évolution de la perturbation radiale, on peut évaluer la perturbation axiale $\zeta(\theta, t)$ en utilisant la relation D.11. L'équation d'onde est essentielle pour

évaluer la valeur de la fréquence ω_n qui est spécifique pour chacun des n . Une expression de la fréquence ω_n est possible en utilisant conjointement l'équation 2.16 et D.12.

$$R^4 \frac{\partial^2 r(\theta, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 r(\theta, t)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 r(\theta, t)}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} -\omega_n^2 a_n \cos(2n\theta) \cos(\omega_n t) \\ \frac{\partial^4 r}{\partial \theta^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} 16n^4 a_n \cos(2n\theta) \cos(\omega_n t) \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} -4n^2 a_n \cos(2n\theta) \cos(\omega_n t) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-R^4 \omega_n^2 + 16n^4 - 4n^2) a_n \cos(2n\theta) \cos(\omega_n t) = 0 \quad (2.17)$$

L'équation 2.17 est égale à zéro pour toutes valeurs de n lorsque:

$$-R^4 \omega_n^2 + 16n^4 - 4n^2 = 0$$

$$\boxed{\omega_n = \pm \frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2}} \quad (2.18)$$

L'équation 2.18 est la relation de dispersion en fonction du mode ($m=2n$). Ainsi, la perturbation radiale $r(\theta, t)$ devient:

$$\boxed{r(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\theta) \cos\left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2} t\right)} \quad (2.19)$$

La forme de la perturbation axiale $\zeta(\theta, t)$ est déterminée en utilisant les équations 2.19 et D.11 (p. 118).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - \frac{r}{R^2}$$

$$\boxed{\zeta(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{1/2} \cos(2n\theta) \sin\left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2} t\right)} \quad (2.20)$$

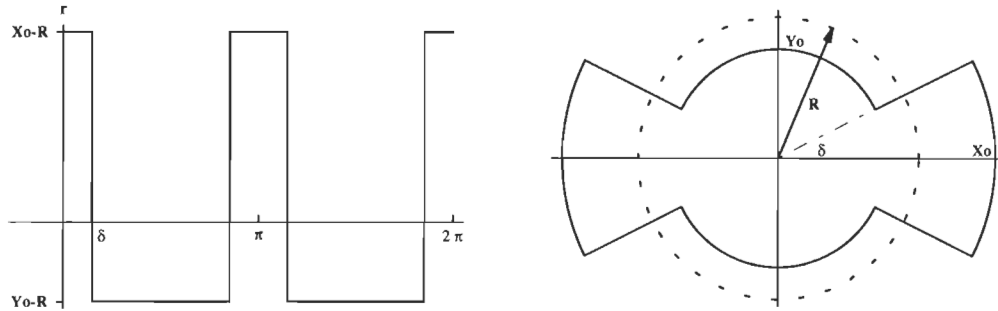


Figure 2.7: Perturbation carrée de mode 2 sur un filament circulaire.

Les équations 2.19 et 2.20 donnent la forme générale des équations de polarisation pour les perturbations radiale et axiale en coordonnées polaires lorsque les perturbations sont périodiques par un développement en série de Fourier. Ces équations sont utiles pour différentes configurations initiales de la perturbation radiale dans les sections qui suivent. Ainsi, à partir de la configuration initiale, on détermine a_n et une valeur de R qui annule a_0 . En reprenant les équations de polarisation définies plus haut, il est possible de trouver l'évolution des perturbations dans le temps.

2.3.2 Perturbation par une onde en créneau

Nous utilisons une perturbation en créneau (figure 2.7) sur un filament circulaire de rayon R , car elle se rapproche de la perturbation sinusoïdale de mode 2 qui donne un filament elliptique. La ressemblance entre les deux filaments obtenus suggère qu'il s'agit de perturbations similaires. Cette perturbation ne donne pas un filament rectangulaire parfait mais conserve un certain intérêt car elle montre des caractéristiques comparables à celles d'une perturbation sinusoïdale.

L'angle de coupure δ est défini comme:

$$\delta = \arctan\left(\frac{y_o}{x_o}\right)$$

où x_o et y_o sont les points de rencontre du filament avec les axes x et y . Le rayon du cercle R sans perturbation se situe entre y_o et x_o . Posons la valeur de y_o inférieure à x_o par convention. Les conditions initiales des perturbations s'écrivent sur une période T comme:

$$\begin{aligned} r(\theta, 0) \equiv r(\theta) &= \begin{cases} x_o - R & -\delta \leq \theta < \delta \\ y_o - R & \delta \leq \theta < \pi - \delta \end{cases} \\ \zeta(\theta, 0) &= 0 \end{aligned}$$

La fonction perturbatrice est paire de période $T = \pi$ et de fréquence $\Omega = 2$. Dans ce qui va suivre, nous allons décrire la perturbation radiale comme une série de Fourier. Dans un premier temps, nous devons évaluer les valeurs de a_o , a_n et b_n .

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{2}{T} \int_0^T r(\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (x_o - R) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} (y_o - R) d\theta \\ &= \frac{4\delta}{\pi} [x_o - y_o] + 2[y_o - R] \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T r(\theta) \cos(n\Omega\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (x_o - R) \cos(2n\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} (y_o - R) \cos(2n\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2n\delta)}{n} [x_o - y_o] \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T r(\theta) \sin(n\Omega\theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

La perturbation radiale est présentée en une série trigonométrique selon l'équation suivante:

$$r(\theta, 0) = \frac{2\delta}{\pi}[x_o - y_o] + [y_o - R] + \frac{2}{\pi}[x_o - y_o] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\delta)}{n} \cos(2n\theta) \quad (2.21)$$

La valeur du rayon R du cercle n'est pas restreinte à une valeur précise et l'équation 2.21 peut être simplifiée davantage en prenant:

$$R = y_o + \frac{2\delta}{\pi}[x_o - y_o]$$

Cette valeur de R annule a_o et la perturbation radiale initiale devient:

$$r(\theta, 0) = \frac{2}{\pi}[x_o - y_o] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\delta)}{n} \cos(2n\theta)$$

La perturbation radiale $r(\theta, 0)$ est une somme de fonctions en cosinus qui sont toutes paires $m = 2n$. L'amplitude du mode 2 est toujours supérieure aux autres modes quelle que soit la valeur de l'angle de coupure δ . Ainsi, le mode principal est 2 et les autres modes sont secondaires. À partir des équations 2.19 et 2.20, on écrit directement les équations de l'évolution des perturbations en fonction du temps.

$$r(\theta, t) = \frac{2}{\pi}[x_o - y_o] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\delta)}{n} \cos(2n\theta) \cos\left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2}t\right) \right] \quad (2.22)$$

$$\zeta(\theta, t) = \frac{2}{\pi}[x_o - y_o] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{1/2} \frac{\sin(2n\delta)}{n} \cos(2n\theta) \sin\left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2}t\right) \right] \quad (2.23)$$

Les équations 2.22 et 2.23 sont les équations de polarisation pour une perturbation initiale en créneau. Pour éviter une expansion à l'infini selon toutes les harmoniques, conservons seulement les deux ou trois premières valeurs de la sommation. Ces valeurs sont suffisantes pour donner une bonne approximation de la

perturbation étudiée. En guise d'exemple, nous avons utilisé les valeurs initiales suivantes pour analyser le comportement du filament.

$$\begin{aligned}x_o &= 1.5 \\y_o &= 1 \\n &= 3\end{aligned}$$

De ces valeurs initiales, on obtient:

$$\begin{aligned}\delta &= \arctan \frac{y_o}{x_o} \\&= 33.7^\circ = 0.588 \text{ rad.} \\R &= 1.187 \\a_1 &= 0.2938 \\a_2 &= 0.1130 \\a_3 &= -0.0400\end{aligned}$$

La figure 2.8 montre l'évolution sur une demi période d'un filament circulaire avec une perturbation en créneau. Après une demi période, le filament reprend presque sa forme initiale tournée de 90 degrés. D'une période à l'autre, le filament oscille mais ne reprend pas sa forme originale. Cela est dû au fait que chaque mode a une fréquence particulière qui n'est pas un multiple du mode principal. La figure 2.9 montre l'évolution de la perturbation axiale $\zeta(\theta, t)$ en fonction de l'angle. Cette perturbation montre la déformation du filament selon le vecteur de la binormale. Les endroits qui se déforment le plus sont les mêmes que ceux qui ont les courbures les plus fortes. De la même façon que la perturbation radiale, la perturbation axiale oscille sans reprendre sa valeur initiale.

2.3.3 Perturbation ajustée

L'objectif est de définir une perturbation sur un cercle qui donnera comme résultante un filament rectangulaire. Le problème est de trouver l'équation de cette perturbation initiale. En coordonnées polaires, on a:

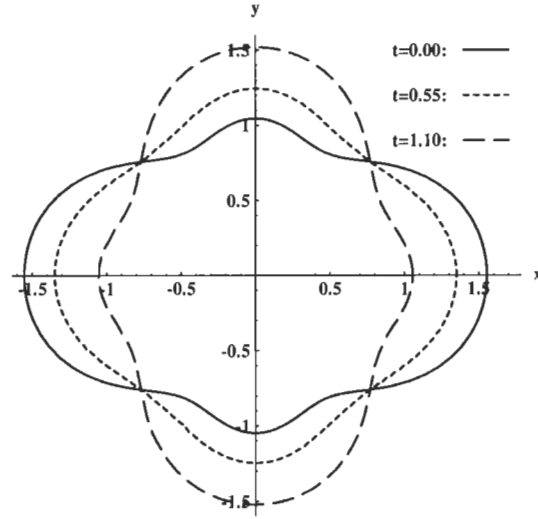


Figure 2.8: Déformation par la perturbation radiale $r(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$.

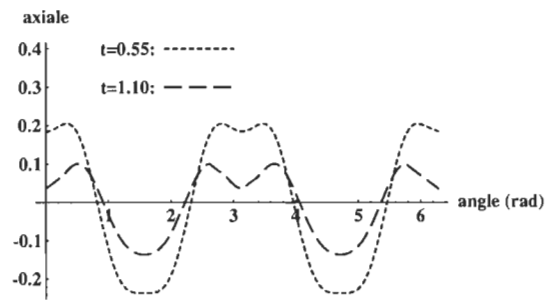


Figure 2.9: Évolution de la déformation axiale $\zeta(\theta, t)$ engendrée par une perturbation en créneau pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$.

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

Il est assez facile de conclure que les perturbations initiales ont la forme:

$$\begin{aligned}r(\theta, 0) \equiv r(\theta) &= \begin{cases} \frac{x_o}{\cos \theta} - R & -\delta \leq \theta < \delta \\ \frac{y_o}{\sin \theta} - R & \delta \leq \theta < \pi - \delta \end{cases} \\ \zeta(\theta, 0) &= 0\end{aligned} \quad (2.24)$$

où $\delta = \arctan(y_o/x_o)$ est l'angle de coupure. Un filament rectangulaire est obtenu en appliquant la perturbation 2.24 sur un cercle de rayon R comme le montre la figure 2.10. Pour exprimer la perturbation radiale en série de Fourier, il nous faut évaluer a_o , a_n et b_n . La valeur de b_n est nulle car la perturbation $r(\theta, t)$ est une fonction paire. Mais, avant de procéder, nous aurons besoin de certaines formules d'intégration tirées du livre de Ryznik (1994).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln \tan \frac{x}{2} \\ \int \frac{1}{\cos x} dx &= \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ \int \frac{\cos 2nx}{\sin x} dx &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} + \ln \tan \frac{x}{2} \\ \int \frac{\cos 2nx}{\cos x} dx &= 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + (-1)^n \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)\end{aligned}$$

Alors, la valeur de a_o et a_n sont:

$$\begin{aligned}a_o &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{x_o}{\cos \theta} - R \right) d\theta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} \left(\frac{y_o}{\sin \theta} - R \right) d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x_o \ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right)} \right) + y_o \ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right)}{\tan \frac{\delta}{2}} \right) \right] - 2R \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x_o \ln \left(\frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) - 2y_o \ln \left(\tan \frac{\delta}{2} \right) \right] - 2R\end{aligned}$$

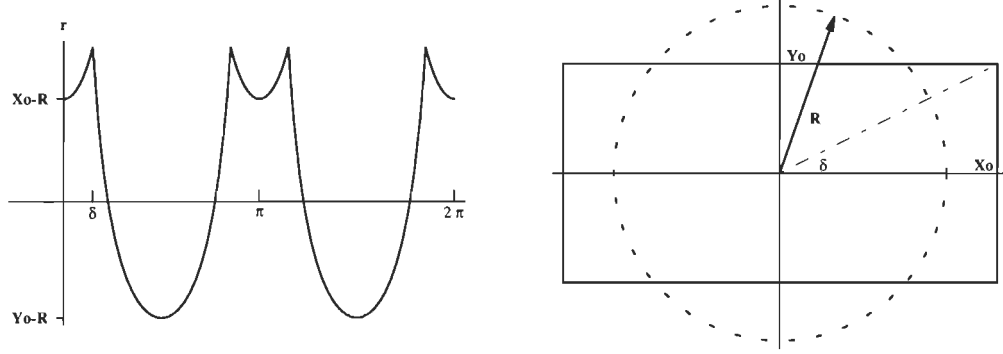


Figure 2.10: Perturbation ajustée sur un filament circulaire afin d'obtenir un filament rectangulaire.

$$\begin{aligned}
 a_o &= \frac{2}{\pi} \left[x_o \ln \left(\frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) + y_o \ln \left(\frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta} \right) \right] - 2R \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{x_o}{\cos \theta} - R \right) \cos 2n\theta \, d\theta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} \left(\frac{y_o}{\sin \theta} - R \right) \cos 2n\theta \, d\theta \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{4}{2k-1} \left\{ (-1)^{n-k} x_o \sin((2k-1)\delta) - y_o \cos((2k-1)\delta) \right\} \right] + \\
 &\quad \frac{2}{\pi} \left[(-1)^n x_o \ln \left(\frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) - 2y_o \ln \left(\tan \frac{\delta}{2} \right) \right] \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{4}{2k-1} \left\{ (-1)^{n-k} x_o \sin((2k-1)\delta) - y_o \cos((2k-1)\delta) \right\} \right] + \\
 &\quad \frac{2}{\pi} \left[(-1)^n x_o \ln \left(\frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) + y_o \ln \left(\tan \frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

La valeur de a_o est annulée en posant:

$$R = \frac{1}{\pi} \left[x_o \ln \left(\frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) + y_o \ln \left(\frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta} \right) \right]$$

Les relations de polarisation sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
r(\theta, t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \frac{4}{2k-1} \left\{ (-1)^{n-k} x_o \sin((2k-1)\delta) - y_o \cos((2k-1)\delta) \right\} \right] + \right. \\
& \left. \left[(-1)^n x_o \ln \left(\frac{1+\sin \delta}{1-\sin \delta} \right) + y_o \ln \left(\tan \frac{1+\cos \delta}{1-\cos \delta} \right) \right] \right\} \cdot \\
& \cos(2n\theta) \cos \left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2} t \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(\theta, t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)^{1/2} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \frac{4}{2k-1} \left\{ (-1)^{n-k} x_o \sin((2k-1)\delta) - y_o \cos((2k-1)\delta) \right\} \right] + \right. \\
& \left. \left[(-1)^n x_o \ln \left(\frac{1+\sin \delta}{1-\sin \delta} \right) + y_o \ln \left(\tan \frac{1+\cos \delta}{1-\cos \delta} \right) \right] \right\} \cdot \\
& \cos(2n\theta) \sin \left(\frac{2n(4n^2-1)^{1/2}}{R^2} t \right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Les équations 2.25 et 2.26 représentent l'évolution des perturbations radiale et axiale en fonction du temps. La première harmonique est un mode deux et toutes les autres sont paires. Les premiers termes de la sommation nous procurent un bon aperçu de l'évolution du filament auquel on applique une perturbation ajustée. Pour montrer un cas particulier, considérons le cas suivant:

$$x_o = 1.5$$

$$y_o = 1$$

$$n = 3$$

À partir de ces valeurs, les variables suivantes sont évaluées:

$$\begin{aligned}
\delta &= \arctan \frac{y_o}{x_o} \\
&= 33.7^\circ = 0.588 \text{ rad.}
\end{aligned}$$

$$R = 1.358$$

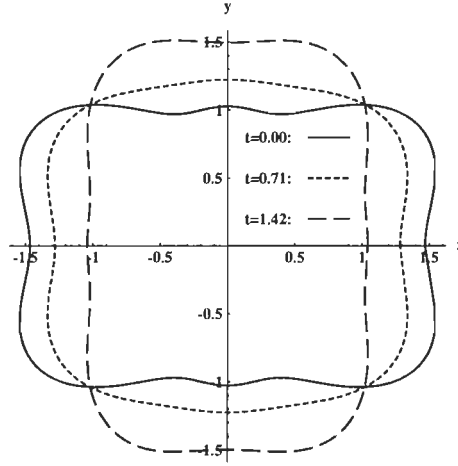


Figure 2.11: Déformation du filament rectangulaire par la perturbation radiale $r(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3273 \\ a_2 &= -0.1099 \\ a_3 &= -0.1073 \end{aligned}$$

La figure 2.11 montre la déformation du filament avec la perturbation ajustée. La déformation axiale avec le temps est montrée à la figure 2.12. D'une oscillation à l'autre, le filament ne reprend pas sa forme initiale pour la même raison que pour un filament avec une perturbation en créneau. D'ailleurs, les deux types de perturbations, en créneau et ajustée, ont un comportement qui se ressemble avec le temps. Mais, on doit favoriser la perturbation ajustée car le filament s'approche de plus en plus d'un filament rectangulaire lorsque n augmente. Cela n'est pas le cas pour la perturbation en créneau. Par contre, le développement en série de Fourier des relations de polarisation pour $r(\theta, t)$ et $\zeta(\theta, t)$ pour la perturbation ajustée est nettement plus complexe que pour la perturbation en créneau.

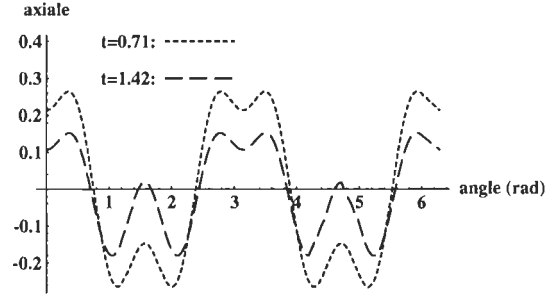


Figure 2.12: Évolution de la perturbation axiale $\zeta(\theta, t)$ au cours du temps pour $x_o = 1.5$, $y_o = 1$ et $n = 3$.

2.4 Distinction entre un filament rectangulaire et carré

Un cercle sur lequel on applique une perturbation dont l'harmonique principale est 2, produit un rectangle. Un carré sera produit si on applique une perturbation dont l'harmonique principale est 4. Le passage du mode principal de 2 à 4 se fait en ajustant le rapport x_o/y_o . Pour ce faire, nous utilisons les deux invariants (appendice C) soit le critère de surface et le critère du périmètre. À partir des valeurs de x_o et y_o , on fait correspondre un cercle qui a la même surface et le même périmètre. En utilisant le critère de surface, le rapport x_o/y_o est:

$$\begin{aligned} 4x_o \cdot y_o &= \pi R^2 \\ 4x_o \frac{x_o}{k} &= \pi x_o^2 \\ k &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$$k = 1.273 = \frac{x_o}{y_o}$$

Le rapport $x_o/y_o = 1.273$ est la valeur qui délimite de part et d'autre un mode 2 d'un mode 4. Le mode principal est 2 pour $x_o/y_o \geq 1.273$ et est 4 pour $1 \leq x_o/y_o < 1.273$. Avec le critère du périmètre, le rapport x_o/y_o s'écrit:

$$\begin{aligned} 4x_o + 4y_o &= 2\pi R \\ x_o + \frac{x_o}{k} &= \frac{\pi}{2}x_o \\ k &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} \\ k &= 1.752 = \frac{x_o}{y_o} \end{aligned}$$

Le mode principal est 2 pour $x_o/y_o \geq 1.752$ et est 4 pour $1 \leq x_o/y_o < 1.752$. Les rapports $x_o/y_o < 1$ ne sont pas intéressants car ils ont un équivalent horizontal par symétrie.

Le mode principal est 4 pour $x_o/y_o < 1.273$, et est 2 pour $x_o/y_o \geq 1.752$ (figure 2.13). Mais que pouvons-nous affirmer pour $1.273 \leq x_o/y_o < 1.752$? Les équations de polarisation des perturbations de la section précédente montrent que le mode principal est 2 pour toutes valeurs de x_o/y_o . Donc, pour rester consistant avec ces relations de polarisations, on choisit le critère de la surface qui nous permet d'avoir un mode de 2 pour $1.273 \leq x_o/y_o < 1.752$ (figure 2.14). En résumé, on a un filament carré de mode principal 4 pour:

$$1 \leq \frac{x_o}{y_o} < 1.273$$

Et, le filament rectangulaire est de mode principal 2 pour:

$$\frac{x_o}{y_o} \geq 1.273 \tag{2.27}$$

Pour comparer deux filaments, le critère de la surface est plus approprié que celui du périmètre.

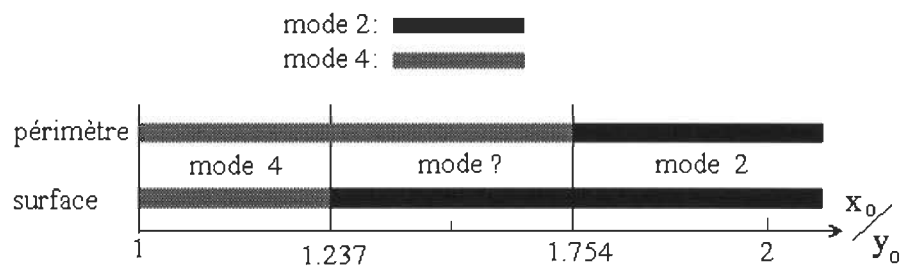


Figure 2.13: Représentation visuelle des rapports de x_o/y_o de la théorie entourant les critères de surface et de périmètre.

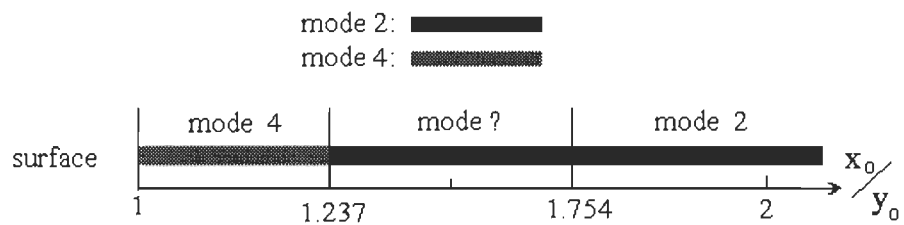


Figure 2.14: Choix du rapport de x_o/y_o qui distingue un filament rectangulaire d'un filament carré.

CHAPITRE III

EXPÉRIMENTATION

Dans ce chapitre, nous présentons le contexte et le montage que nous avons réalisé pour nos expériences. Nous présentons les principaux résultats obtenus de la vitesse induite pour différents filaments de forme rectangulaire que nous comparons avec la vitesse induite théorique. Enfin, nous montrons quelques images de la fragmentation du filament.

3.1 Montage

Le montage utilisé pour nos expériences est de type “orifice”. Le fluide utilisé est l’air de la pièce sans traitement spécifique. La qualité de l’air ainsi que les variations de pression et de température ne modifient pas les résultats. Les valeurs des différents paramètres lors des expériences sont:

$$T \simeq 300 \text{ K}$$

$$\rho = 1.18 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\nu = 1.57 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

De la fumée est générée dans une enceinte fermée qui sert de traceur pour visualiser les anneaux (figure 3.1). Une impulsion électrique est envoyée au haut-parleur pour le faire déplacer brusquement d'environ un millimètre. La tension est maintenue durant 1.5 seconde pour être graduellement relâchée par la suite pour éviter la formation d'un tourbillon secondaire (figure 3.2). Le déplacement et la vitesse du haut-parleur varient selon l'amplitude de l'impulsion. Le haut-parleur atteint son déplacement maximum 0.03 seconde après le début de l'impulsion. Ce temps de montée du haut-parleur est constant pour toutes les expériences ce qui est une limitation de notre montage. La vitesse de déplacement du haut-parleur influence la circulation et le temps de montée influence le rayon du filament tourbillonnaire. Par conséquent, le rayon (σ) de nos filaments est constant pour toutes nos expériences avec un orifice donné. Par la suite, le haut-parleur a un léger recul pour se maintenir à la même position durant le reste de l'impulsion. L'écart entre le déplacement maximum et sa position moyenne est dû à l'inertie du haut-parleur et la résistance de l'air à l'embouchure de l'ouverture. Cet écart est indésirable car il peut se former un tourbillon secondaire qui vient interagir avec le tourbillon principal en diminuant la vitesse d'induction. On a constaté qu'on pouvait diminuer cet écart en diminuant la surface de l'ouverture ce qui a pour effet d'accroître l'impédance mécanique du système. On a donc intérêt à avoir des ouvertures avec des surfaces réduites. Mais plus la surface de l'ouverture diminue, plus on diminue le rayon (R) de notre ouverture. Il faut se rappeler que notre théorie exige $R \gg \sigma$ pour être applicable. Un compromis acceptable est d'avoir des surfaces d'au moins 4 cm^2 . On donne dans le tableau 3.1 les valeurs de déplacement du haut-parleur en fonction de la tension qui sert au calcul du nombre de Reynolds.

Les variables importantes en expérimentation sont la circulation (κ), la vitesse de déplacement (V_s), le nombre de Reynolds (Re) et le rayon (σ) du filament tourbillonnaire. Avec notre montage expérimental, on a la possibilité de faire varier Re en contrôlant la vitesse de sortie de l'air et la dimension de la fente. On n'a pas la possibilité de faire varier la dimension du filament car le temps de montée des impulsions est le même dans toutes les expériences. Toute l'expérimentation est basée sur ces deux critères: nombre de Reynolds et dimension de l'ouverture.

Tableau 3.1: Déplacement (D) du haut-parleur en fonction de la tension (Volts) pour une ouverture de 6 cm^2 et $D_{eq}^* = 2.764 \text{ cm}$

Tension (Volt)	D (mm)	V_s (cm/sec)	Re	κ (cm ² /sec)
.40	.004	1.09	19.19	3.01
.50	.007	1.91	33.63	5.28
.60	.189	51.4	904.9	142.1
.70	.311	84.7	1491	234.1
.80	.514	140	2465	387.0
.90	.726	198	3486	547.3
1.00	1.00	272	4789	751.8
1.10	1.29	351	6179	970.1
1.20	1.61	438	7711	1211
1.30	1.89	515	9067	1424
1.40	2.14	583	10263	1611
1.50	2.42	659	11602	1821
1.70	2.73	743	13081	2054
2.00	2.87	770	13556	2128
3.00	2.87	781	13750	2159
4.00	2.88	784	13802	2167
5.00	2.90	789	13890	2181

* D_{eq} : diamètre équivalent pour un cercle ayant une surface identique.

Nous n'avons pas de données expérimentales sur la distribution de la circulation. Un vélocimètre Doppler ou la technique des bulles d'hydrogène sont communément utilisés pour déterminer la distribution de la vitesse et par le fait même, la circulation. Ne disposant pas de ce type d'équipement, nous approximations Re à partir de la vitesse moyenne qui correspond à une distribution d'un corps rigide. Le nombre de Reynolds est nécessaire afin de déduire la circulation. Naturellement, on calcule des valeurs moyennes du nombre de Reynolds et de la circulation car on ne peut pas déterminer ces valeurs autrement.

$$\begin{aligned}
 S_{h-p} &\simeq 490 \text{ cm}^2 \\
 V_{h-p} &= \frac{D}{t} \\
 t &\simeq 0.03 \text{ s} \\
 V_s &= \frac{V_{h-p} \cdot S_{h-p}}{S_{fente}} \\
 Re &= \frac{V_s \cdot D_{eq}}{\nu} \\
 \kappa &= Re \mu = V_s \cdot D_{eq}
 \end{aligned}$$

S_{h-p}	: surface du haut-parleur
V_{h-p}	: vitesse de déplacement du haut-parleur
D	: déplacement du haut-parleur (mm)
D_{eq}	: diamètre équivalent pour un cercle ayant une surface identique (cm)
t	: temps de monté du haut-parleur (s)
V_s	: vitesse du fluide à la sortie de la fente ($cm \text{ s}^{-1}$)
S_{fente}	: surface de l'ouverture (cm^2)

3.2 Induction

Dès le moment où le haut-parleur arrive à son déplacement maximum, il y a décollement du filament de tourbillon de la paroi car il n'est plus alimenté par

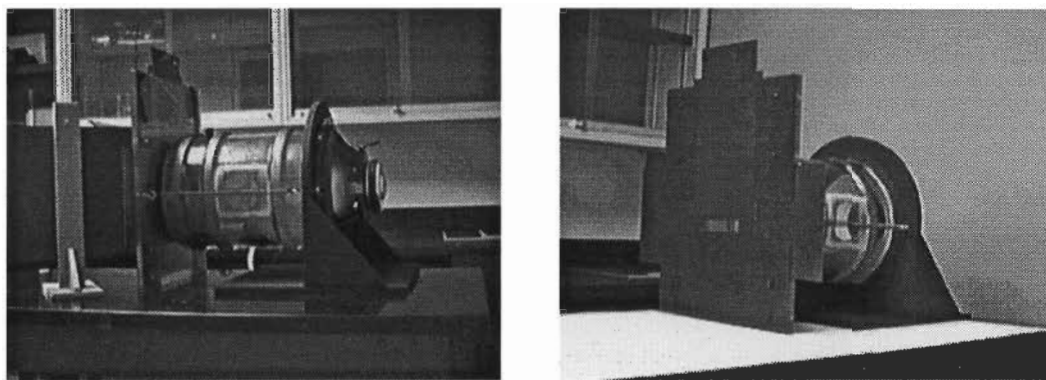


Figure 3.1: Photo du montage expérimental.

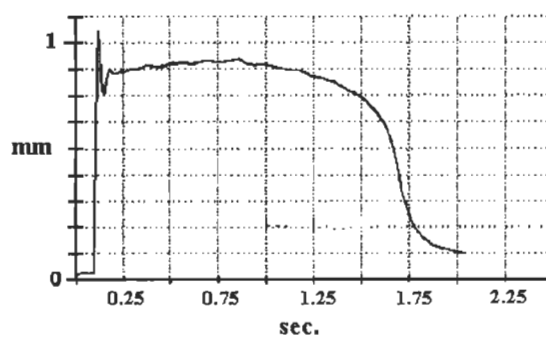


Figure 3.2: Distance parcourue par le haut-parleur en fonction du temps pour une ouverture de 6 cm^2 .

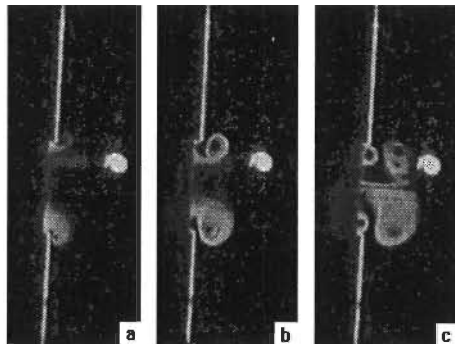


Figure 3.3: Formation d'un anneau de tourbillon par une ouverture rectangulaire, 1/30 seconde par image, $Re \approx 3000$.

l'apport d'air venant de l'enceinte. À partir de cet instant, le filament tourbillonnaire évolue sous sa propre induction. Ce phénomène est illustré dans la figure 3.3 qui utilise un laser donnant une coupe transversale du filament. Lors de la sortie de l'air par l'ouverture, il y a un enroulement à la paroi qui démontre que le filament tourbillonnaire est généré par les gradients de pression et de vitesse et que Re n'est pas très élevé. À l'embouchure de l'ouverture, il peut y avoir aussi un tourbillon secondaire après le décollement de la paroi du tourbillon principal. Ce tourbillon secondaire tourne dans le sens inverse du tourbillon principal.

Le tableau 3.2 établit une comparaison entre deux ouvertures rectangulaires de dimensions $2 \times 3 \text{ cm}$ et $1.7 \times 3.5 \text{ cm}$. Pour ces ouvertures, le filament ne se propulse pas sous sa propre induction pour des Re inférieurs à 2000 car il s'effondre dès sa formation. Pour des Re plus élevés que 7000, le filament se détruit par une instabilité de mode 7 ou 8 après seulement une demi période d'oscillation. Le mode 8 apparaît avec les Re les plus élevés. Le filament est d'autant plus stable que le rapport de x_o/y_o se rapproche de l'unité pour un Re donné. Le rayon du filament tourbillonnaire est d'environ 0.5 cm . Les valeurs fournies sont des valeurs moyennes. La vitesse d'induction dépend principalement de Re et pas du rapport x_o/y_o de l'ouverture. La période d'oscillation diminue au fur et à mesure que Re augmente. La période est plus longue pour la deuxième oscillation que la première sur le filament. L'écart entre la période de la première et de la seconde oscillation s'atténue lorsque Re augmente.

Tableau 3.2: Vitesse d'induction expérimentale pour des ouvertures de 6 cm^2 .

Re	$2 \times 3 \text{ cm}$				$1.7 \times 3.5 \text{ cm}$			
	$V_{2 \times 3}$ cm/s	Période		m_{ins}^*	$V_{1.7 \times 3.5}$ cm/s	Période		m_{ins}
		1 osc*	2 osc			1 osc	2 osc	
2400	18.2	10	13	—	17.4	11	18	—
3486	21.7	7	11	—	23.2	9	12	—
3336	24.3	6	8	—	25.9	7	7.5	—
4789	31.2	5.5	6	—	29.1	6	7	7
4426	33.1	5	6	—	34.2	4.5	5	7
6179	35.8	4.5	5	—	34.7	4.5	5	7
7711	44.0	4	4	7	43.3	3.5	3.5	8

$\star m_{ins}$: mode instable

$\star osc$: oscillation, en trentièmes de seconde

La vitesse expérimentale et le rayon du filament sont mesurés avec une caméra vidéo. Les images se suivent à tous les $1/30$ de seconde. On emploie l'équation B.12 (p. 86) pour trouver la vitesse induite théorique en gardant la partie de la translation seulement. La vitesse induite théorique (V_{th}) est évaluée pour $R = D_{eq}/2 = 1.38 \text{ cm}$ et $\sigma \simeq 0.5 \text{ cm}$. Le tableau 3.3 compare la vitesse expérimentale $V_{exp} = (V_{2 \times 3} + V_{1.7 \times 3.5})/2$ moyenne avec la vitesse théorique V_{th} . Dans l'élaboration de l'équation de la vitesse théorique, on a posé $R \gg \sigma$. En raison des limitations de notre montage, cette condition n'est pas entièrement satisfaite. Le rapport de la vitesse théorique sur la vitesse expérimentale est approximativement constant.

$$V_{th} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi R} \left[\ln\left(\frac{R}{\sigma}\right) \right] \mathbf{B}$$

La vitesse d'induction en chaque point du filament tourbillonnaire rectangulaire n'est pas la même. On constate que les extrémités ont des vitesses d'induction plus élevées qu'ailleurs sur le filament. En général, après 2 ou 3 trentièmes de seconde, le filament a la même forme qu'à la sortie de la fente mais il a tourné de 90 degrés dans le cas d'une ouverture qui possède un mode principal 2 (équation 2.27). Cette rotation pour un filament rectangulaire est présentée à

Tableau 3.3: Comparaison de la vitesse d'induction expérimentale avec la vitesse théorique.

Re	κ (cm^2/s)	V_{th} (cm/s)	V_{exp} (cm/s)	V_{exp}/V_{th}
2400	467.1	27.3	17.8	0.65
3486	547.3	32.0	22.5	0.70
3336	649.5	40.0	25.1	0.63
4789	751.8	44.0	30.2	0.69
4426	861.0	50.3	33.7	0.67
6179	970.2	56.8	35.3	0.62
7711	1211	70.7	43.5	0.63

la figure 3.4. Dans le cas d'un mode principal 4, on observe le même phénomène mais l'angle de rotation est de 45 degrés (figure 3.5). D'une période à l'autre, les angles droits originaux s'atténuent pour devenir presque un filament circulaire. Il est bon de mentionner qu'il n'y a aucun déplacement de matière. L'apparence de rotation est due à la déformation du filament et non à la rotation de la matière.

3.3 Scission du filament rectangulaire

Au-delà d'un certain rapport x_o/y_o et pour Re suffisamment grand, le tube tourbillonnaire n'oscille plus. Pour des configurations particulières, il y a séparation du tube tourbillonnaire en deux ou trois tourbillons circulaires dès la première oscillation lorsque le filament est rectangulaire de mode principal 2. Pour un filament carré, il n'y a jamais fragmentation du filament peu importe Re . En augmentant Re , le filament carré oscille plus rapidement, tout simplement.

On a adapté un jeu de miroirs à notre montage pour avoir une vue tridimensionnelle et pour comprendre la déformation du filament (figure 3.6).

La séparation du filament en deux anneaux se produit pour des ouvertures ayant un rapport de 3.5/1 jusqu'à environ 5.5/1. Il se forme deux anneaux similaires quasi circulaires. Pour une ouverture en deçà du rapport 3.5/1, il est impossible de fragmenter le filament de tourbillon original. L'angle de séparation

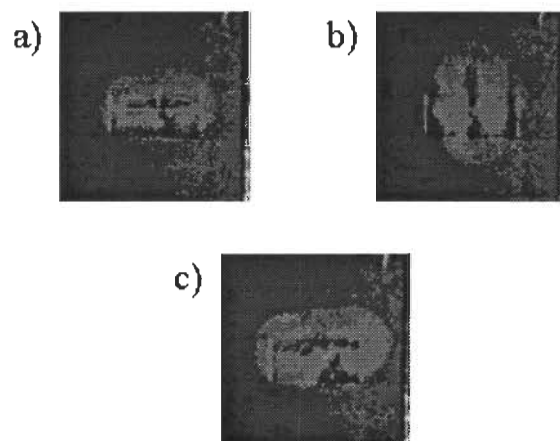


Figure 3.4: Rotation de 90 degrés pour un filament rectangulaire (vue de face).

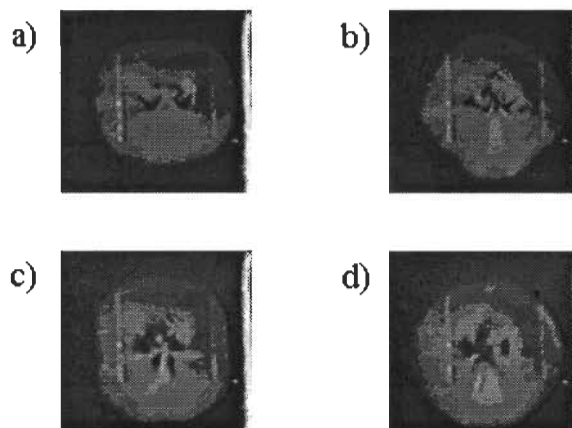


Figure 3.5: Rotation de 45 degrés pour un filament carré (vue de face).

entre les deux anneaux est d'autant plus grand que le rapport de l'ouverture x_o/y_o est plus élevé. De 3.5/1 à 4.5/1, il se peut que les filaments se rejoignent en un seul après séparation, étant donné que l'angle de séparation entre les deux filaments tourbillonnaires est petit.

Dans des conditions particulières, les tourbillons se propagent dans le plan de l'ouverture après séparation. On a utilisé une fente de 3.5/1 et un nombre de Reynolds d'environ 2500. En fait, il y a séparation après la demi période, ensuite jonction en un filament pour se séparer après une période.

Lorsque le rapport atteint 6/1 jusqu'à 7.5/1, il peut y avoir formation de trois tourbillons. Pour des Re faibles, le tourbillon central est nettement plus gros que les deux autres qui se trouvent aux extrémités. Au fur et à mesure que Re augmente pour une même ouverture, le tourbillon du centre devient plus petit et ceux des extrémités grossissent. Lorsque Re augmente, l'angle de séparation entre les deux tourbillons des extrémités diminue. Pour un Re suffisamment élevé, il y a seulement deux tourbillons comme dans le cas d'une ouverture de rapport plus petit.

Un rapport d'ouverture plus grand que 8/1 ne donne pas un nombre de tourbillons supérieurs à trois. Le nombre de tourbillons maximum qu'on a obtenu avec notre montage est de trois.

Lorsqu'il y a séparation en deux ou trois tourbillons, ceux-ci sont reliés par un mince fil qui demeure dans la trainée (figure 3.6). La séparation du filament se produit presque toujours après une demi période. C'est-à-dire que si la fente est horizontale, les deux (ou trois) tourbillons voyagent dans le plan vertical après séparation.

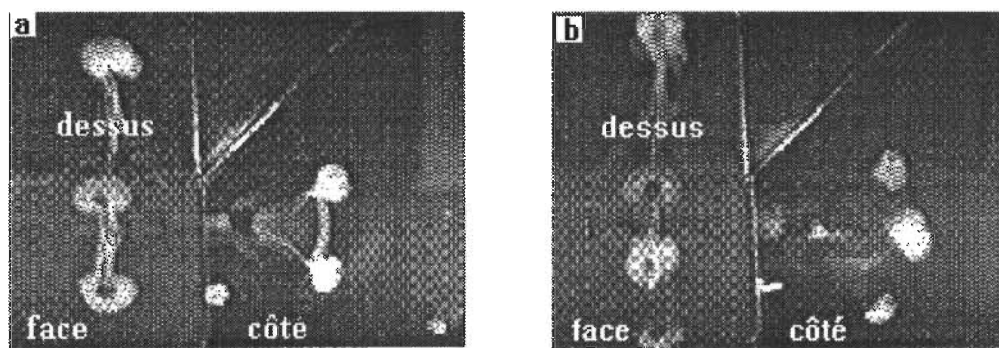


Figure 3.6: Trainée qui accompagne un filament tourbillonnaire séparé en a) deux ou en b) trois.

CHAPITRE IV

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le principal objectif de notre expérimentation est de décrire la déformation du filament lorsque celui-ci se meut par sa propre induction. On veut aussi savoir dans quelles conditions on obtient des modes supplémentaires et comment ces modes affectent le comportement du filament dans le temps. Nous abordons l'explication sommaire du processus de la fragmentation d'un filament rectangulaire. De plus, nous montrons qu'il peut y avoir une similitude entre la collision de deux anneaux circulaires et un filament rectangulaire.

4.1 Déformation d'un filament rectangulaire

Jusqu'à présent dans la littérature, il n'y a pas eu d'expériences exploitant les fentes rectangulaires spécifiquement. Une première approche a été faite par Kambe qui s'était intéressé à plusieurs types d'ouvertures. On utilise son travail comme point de comparaison pour nos expériences.

On constate que les zones de fortes courbures se déplacent plus rapidement selon l'axe central. Cela est conforme aux prédictions de Hama (1962). Donc, les extrémités du filament rectangulaire se déplacent beaucoup plus rapidement que les zones planes. On sait également que le filament ne s'étire ou ne se contracte pas dans les premiers instants de son induction et conserve la même longueur. Cela

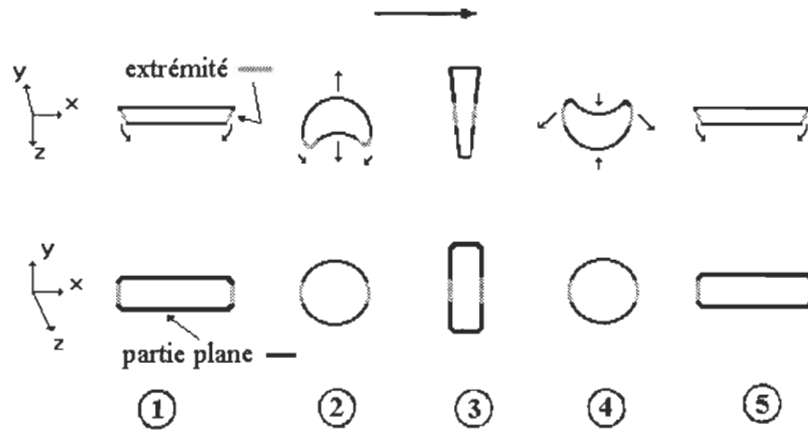


Figure 4.1: Schéma de la déformation du filament tourbillonnaire rectangulaire de mode 2 (haut: vue à angle; bas: vue de face).

explique que les extrémités ne se propagent pas en ligne droite. Elles se dirigent l'une vers l'autre dès la formation du filament tourbillonnaire. En s'avancant l'une vers l'autre, elles provoquent une courbure dans la partie qui était plane à l'origine de sorte que la vitesse de cette dernière partie augmente. Il s'ensuit une diminution de la courbure ainsi qu'un ralentissement des extrémités (figure 4.1). Le même principe s'applique à un filament ayant un mode principal 4.

Il y a un écart entre la vitesse expérimentale et théorique d'environ 40 pour cent (voir table 3.3). Cette différence est expliquée par Maxworthy (1972) qui a montré qu'il y avait une perte de la circulation dans la traînée diminuant ainsi la vitesse d'induction. Après seulement quelques centimètres, on peut avoir perdu jusqu'à 50 pour cent de la circulation originale. De plus, lors de la formation du tourbillon principal, il y a apparition d'un tourbillon secondaire qui interagit avec le tourbillon principal en diminuant sa vitesse.

Expérimentalement, un filament tourbillonnaire rectangulaire perd sa forme originale d'une oscillation à l'autre par la présence de la viscosité.

4.2 Instabilité

Les tourbillons issus d'une fente rectangulaire subissent des perturbations et l'instabilité s'y installe plus facilement que sur un anneau issu d'une ouverture circulaire. Un nombre de Reynolds trop élevé empêche l'anneau d'osciller autour d'une forme d'équilibre qui est la forme de l'ouverture.

Pour les filaments rectangulaires de $2 \times 3 \text{ cm}$ et $1.7 \times 3.5 \text{ cm}$, on a vu apparaître un mode 7 ou 8 (voir table 3.2) supplémentaire spontané qui vient détruire le filament pour des Re supérieurs à 3300. L'équation E.35 (p. 159) définie dans l'appendice E, provenant de l'article de Widnall et Sullivan (1973), sera utilisée pour fins de comparaison.

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \ln \frac{8R}{\sigma} + A - \frac{1}{2} \\ \tilde{V} &= 2.84\end{aligned}$$

où $R = 1.38 \text{ cm}$ et $\sigma \simeq 0.5 \text{ cm}$ sont des valeurs expérimentales. Comme nous avons supposé la distribution d'un corps rigide pour nos expériences, nous avons choisi $A = 0.25$. Pour cette valeur de \tilde{V} , Widnall et Sullivan ont observé dans leurs expériences un mode 8 apparaître spontanément (figure 4.2). De ce point de vue, nous pouvons comparer nos résultats aux leurs. Ce mode spontané n'apparaît pas dans tous les cas. Pour Re faible, le filament rectangulaire oscille durant quelques périodes et le filament se dissipe par l'effet de la viscosité. Dans ces cas-ci, la viscosité a un effet stabilisateur et empêche l'instabilité de s'installer. Pour de très hauts Re , le filament est instable dès sa sortie de l'ouverture et est détruit.

4.3 Fragmentation

Comme nous l'avons mentionné, les extrémités du filament rectangulaire se dirigent l'une vers l'autre à cause de leur courbure locale qui est plus forte par rapport au reste du filament qui occasionne une vitesse induite plus élevée. Le

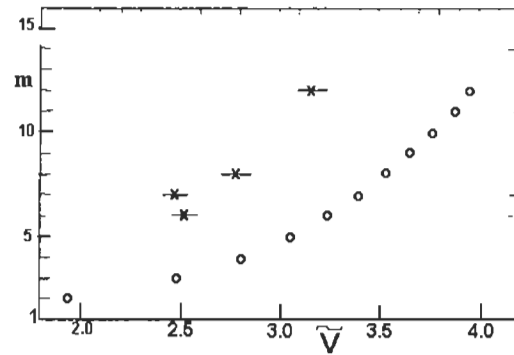


Figure 4.2: Nombre d'ondes (m) instable en fonction de \tilde{V} ; \times , expérience; \circ , prédiction théorique au maximum d'amplification (Widnall et Sullivan, 1973).

phénomène de scission est exclusivement dû au rapport x_o/y_o du filament et à la présence de la viscosité (figure 4.3). La première étape (1) montre le filament rectangulaire. On sait que les endroits qui ont une courbure plus grande auront une vitesse d'induction plus élevée que le reste du filament (étape 2). Les extrémités se déplaçant l'une vers l'autre, induisent une courbure sur les parties planes du filament qui augmentent leur vitesse d'induction qui est d'autant plus petite que le rapport x_o/y_o est grand. Ce faisant, la vitesse induite sur les parties planes diminue celle des extrémités car la courbure des extrémités diminue (étape 3). Pour un rapport de x_o/y_o suffisamment grand, il y aura scission du filament lorsque les extrémités se rejoignent (étapes 4). Par la suite, les deux filaments résultant sont presque circulaire et se séparent à vitesse constante (étape 5 et 6).

Le rapport minimum trouvé expérimentalement est de 3.5/1. Au delà de ce rapport, les deux extrémités entrent en contact et provoquent la séparation du filament. En deçà de ce rapport, il est impossible de fragmenter le filament rectangulaire.

Après fragmentation du filament en 2, l'angle de séparation entre les deux filaments circulaires est d'autant plus grand que le rapport x_o/y_o est grand. Cela s'explique par le fait que les extrémités avancent plus rapidement que les parties rectilignes du filament. Plus le rapport x_o/y_o augmente et moins les parties rectilignes vont s'éloigner l'une de l'autre car elles ont une vitesse induite plus

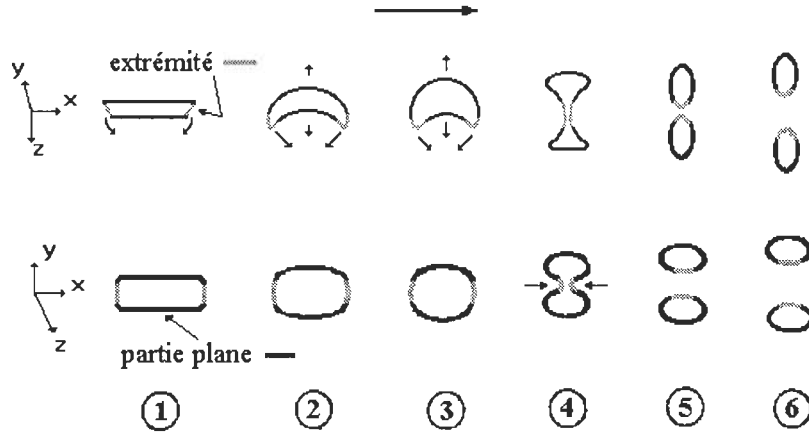


Figure 4.3: Schéma du mécanisme de séparation en 2 du filament tourbillonnaire rectangulaire (haut: vue à angle; bas: vue de face).

faible.

La fragmentation du filament en 3 est plus complexe. On n'est pas en mesure d'en présenter une explication complète. D'ailleurs, personne ne l'a jamais fait. Comme on l'a déjà mentionné, cela se produit pour des rapports de x_o/y_o plus élevés. Sommairement, nous avons constaté qu'il n'y a pas seulement que les extrémités qui entre en contact lors de la fragmentation du filament en 3 parties. Les points de rencontres sont plus nombreux et cela a pour effet de produire un filament central avec 2 autres en périphérie qui se propagent perpendiculairement à l'orientation de la fente rectangulaire initiale. Ces 3 filaments sont tous presque circulaires. De nos expériences, il a été impossible de savoir avec précision les endroits que le filament rectangulaire se recoupait. Cela nous empêchait d'aller plus loin dans nos investigations. Afin de savoir ces points de rencontres, il nous aurait fallu un équipement plus sophistiqué et précis.

Après séparation des tourbillons, il y a un filament qui relie ceux-ci et qui reste dans la traînée. Ce phénomène est expliqué sommairement par Melander et Hussain (1989). Ce filament se compose d'une partie du fluide du filament tourbillonnaire qui se mélange avec une partie du fluide extérieur qui ne possède pas de circulation. Même sans la séparation du filament tourbillonnaire, on peut

apercevoir une traînée qui est pareillement composée.

Lors de la séparation du filament original, la rencontre des deux extrémités des tourbillons ainsi formés se fait après une demi-période et c'est la raison pour laquelle les tourbillons se propagent perpendiculairement à la fente. Si la séparation ne s'est pas faite après une demi-période, elle ne se fera pas.

4.4 Similitude entre deux anneaux circulaires et un tourbillon généré par une fente rectangulaire

Il y a une similitude frappante entre la dynamique de la collision de deux anneaux circulaires et l'évolution d'un filament rectangulaire. Il est possible de concevoir un tourbillon généré par une fente rectangulaire comme la jonction de deux anneaux circulaires. Ce lien n'a encore jamais été montré jusqu'à présent. Illustré à la figure 4.4, nous avons comparé nos résultats expérimentaux avec les résultats d'une simulation numérique faite par Kida et al. (1991). Comme on le sait, il y a eu beaucoup de simulations numériques de la jonction de deux anneaux depuis la dernière décennie. Expérimentalement, la collision de deux filaments circulaires a été réalisée par Kambe (1971) et aussi par Fohl et Turner (1975). La similitude s'établit lors de la jonction des deux anneaux circulaires pour n'en former qu'un seul. À ce moment, le filament tourbillonnaire ressemble à celui qui est formé par une fente rectangulaire et se comporte de la même façon. La déformation s'effectue aussi de la même manière et il y a la présence d'un filament reliant les deux tourbillons ainsi qu'une traînée après la séparation. Ces simulations permettent d'obtenir des informations supplémentaires telles que la circulation, la vitesse et la pression en tout point du filament. De plus les simulations peuvent prendre en considération la viscosité, paramètre très difficile à inclure dans nos équations théoriques. Bien que nous n'ayons pas inclus la viscosité dans nos équations, ne perdons pas de vue qu'elle est un facteur primordial dans la fragmentation d'un filament rectangulaire.

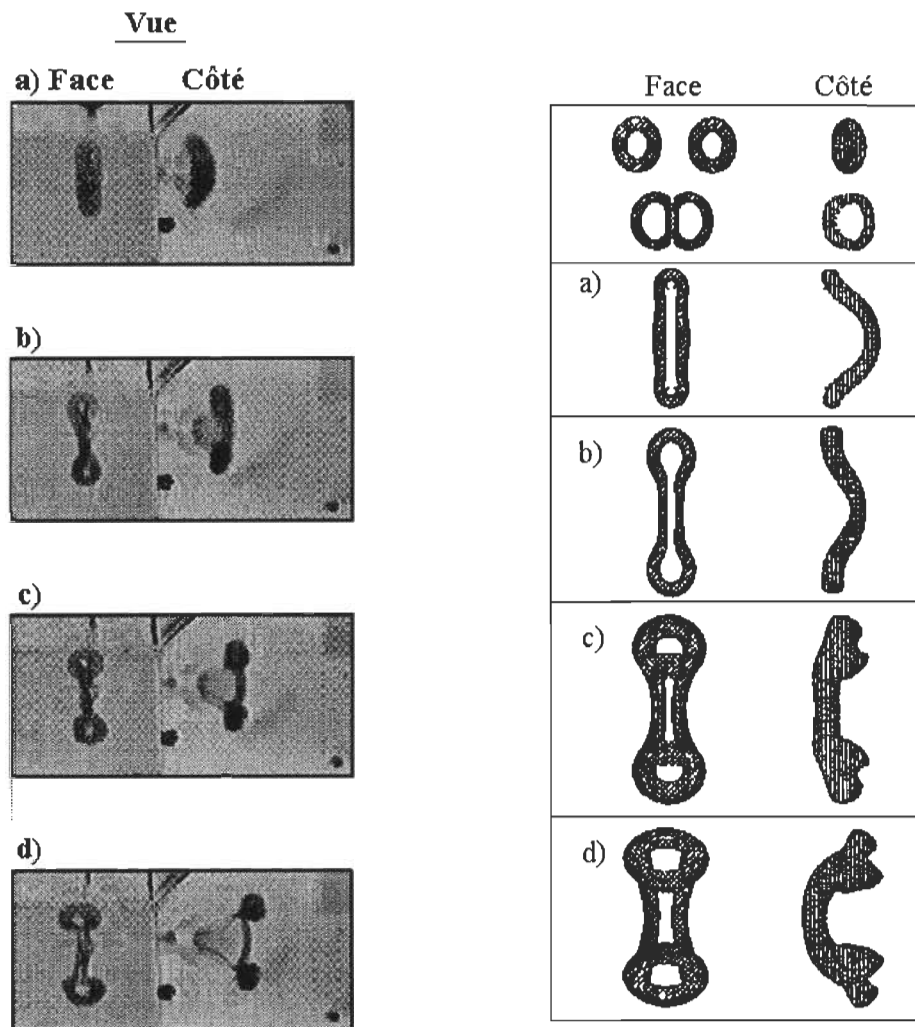


Figure 4.4: Images expérimentales d'un tourbillon issu d'une fente rectangulaire comparées avec les images de la collision de 2 tourbillons obtenues par simulation (Kida, Takaoka et Hussain, 1991).

CONCLUSION

On a utilisé différentes méthodes pour déterminer la vitesse d'induction d'un filament rectangulaire. La plus probante est celle qui utilise le "Concept d'induction localisée" développé par Hama (1962). La méthode des quatres filaments rectilignes donne également une vitesse d'induction intéressante en utilisant la loi de Biot-Savart. On a confirmé que les endroits ayant la vitesse d'induction la plus élevée se situent aux extrémités du filament rectangulaire et cette vitesse est d'autant plus élevée que le rapport x_o/y_o augmente.

L'existence de deux paramètres invariants pour les filaments fermés a été démontrée:

- La longueur du filament reste constante dans le temps.
- La surface fermée projetée du filament reste constante dans le temps.

Le "Concept d'induction localisée" fait un lien direct entre la vitesse d'induction et la courbure locale du filament tourbillonnaire. Plus la courbure à un point du filament est élevée, plus sa vitesse d'induction est grande. Conceptuellement, les deux paramètres d'invariance avec le "Concept d'induction localisée" forment les bases permettant d'expliquer le comportement et de prédire l'évolution d'un filament tourbillonnaire fermé en absence d'instabilité et de viscosité. En considérant seulement ces critères d'invariance et le "Concept d'induction localisée", on démontre que tout filament non circulaire oscille continuellement.

Nous avons présenté les équations de la déformation du filament rectangulaire en utilisant la théorie des perturbations. Nous avons appliqué ces équations à deux configurations initiales de perturbations. Les deux configurations donnent des résultats essentiellement analogues mais la technique de la "perturbation

ajustée" donne des résultats légèrement meilleurs que celle de la "perturbation en créneau". Le développement en série de Fourier des perturbations initiales a montré la présence de modes pairs seulement dont le mode deux est le mode principal. De plus, le filament ne retrouve pas sa forme initiale après chaque oscillation car la relation de dispersion indique qu'il y a une fréquence particulière pour chaque mode pair. Cette fréquence augmente avec le mode. Nos expériences ont corroboré le fait que le filament oscille autour de sa forme d'origine comme la théorie le démontre.

La théorie de la stabilité est nécessaire pour expliquer le phénomène de destruction des filaments rectangulaires dans nos expériences. De cette théorie, on montre que même en l'absence de la viscosité, la plupart de filaments deviennent instables et se détruisent avec l'apparition d'une onde qui croît avec le temps. Cette onde instable se développe et a un mode particulier qui dépend du rayon σ du filament. Ainsi, plus le filament est petit et plus le mode instable est élevé. Expérimentalement, on peut diminuer la dimension du filament en diminuant la durée de l'impulsion. Dans nos expériences, la durée des impulsions est constante et on ne peut modifier la dimension σ des filaments. La viscosité peut également détruire le filament tourbillonnaire en dissipant la circulation du tourbillon avec son environnement immédiat. En fait, tout filament tourbillonnaire a un temps de vie limité et est détruit par la présence de la viscosité ou par l'apparition d'une onde instable ou par l'effet conjoint des deux.

Dans l'ensemble, nos résultats expérimentaux coïncident assez bien avec les prédictions théoriques malgré notre impossibilité de déterminer la distribution de la circulation qu'on a supposée constante dans nos calculs. Une façon de trouver la distribution de la circulation serait l'utilisation d'un laser Doppler. L'écart entre la vitesse théorique et expérimentale est expliquée par la perte de circulation dans la traînée et par la présence d'un tourbillon secondaire. De notre montage expérimental, on a un contrôle sur le nombre de Reynolds et la dimension de l'ouverture. Le nombre de Reynolds nous permet de faire varier la circulation.

La fragmentation d'un tourbillon rectangulaire en 2 ou 3 tourbillons circulaires, qu'on a observée sous des conditions particulières, est expliquée par la présence de la viscosité et le rapport de x_o/y_o . L'étude de la viscosité ne fait

pas partie des objectifs de ce mémoire mais est l'élément essentiel qui explique la fragmentation. De plus, la simulation numérique de la collision de deux filaments circulaires a une ressemblance troublante avec la fragmentation d'un filament rectangulaire en deux. Cela nous indique que la compréhension de la collision de deux filaments circulaires serait utile pour celle d'un filament rectangulaire.

Expérimentalement, il est évident que la viscosité affecte les résultats. Notre théorie ne la considère pas mais, pour des études ultérieures, il serait intéressant de l'inclure. On est conscient que cela ne sera pas aisé car les équations deviennent non linéaires, ce qui augmente considérablement la difficulté de trouver une solution.

APPENDICE A

FORMULE DE BIOT-SAVART

Cet appendice est essentiel pour l'étude de la vitesse d'induction d'un filament tourbillonnaire. La formulation de la vitesse d'induction se présente sous la même forme que la formule de Biot-Savart. Cette formule est générale et sans approximations.

Vitesse d'induction

Le vecteur tourbillon Ω s'exprime en fonction de la vitesse comme:

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{q} \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ représente le vecteur vitesse. On voit par cette équation que le vecteur tourbillonnaire Ω est facile à trouver si on connaît le vecteur vitesse \mathbf{q} mais on ne le connaît pas. C'est justement ce dernier que l'on veut trouver. Pour ce faire, il est possible d'exprimer le vecteur vitesse (Ryhming, 1991, p. 30) à l'aide d'un vecteur potentiel \mathcal{A} pour un fluide incompressible et stationnaire tel que:

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathcal{A}$$

Cette substitution est valable car elle satisfait l'équation de continuité (A.2).

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Donc, le vecteur potentiel doit être solénoïdal ($\nabla \cdot \mathcal{A} = 0$). On effectue le rotationnel de part et d'autre de l'équation A.1 afin de trouver une solution pour le vecteur potentiel.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{q} &= \nabla \times (\nabla \times \mathcal{A}) \\ &= \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathcal{A}}_{=0}) - \nabla^2 \mathcal{A} \\ \nabla \times \mathbf{q} &= -\nabla^2 \mathcal{A} \end{aligned}$$

Cette équation est semblable à l'équation de Poisson pour chaque composante de \mathcal{A} . La solution de cette équation différentielle est de la forme:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\mathbf{x}^*)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|} dV(\mathbf{x}^*)$$

Par définition, on a:

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(x, y, z) \\ \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*(x^*, y^*, z^*) \\ dV(\mathbf{x}^*) &\equiv \text{élément de volume} \\ \nabla_x &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Pour un point quelconque $P(x, y, z)$, l'expression du vecteur potentiel devient l'équation A.3.

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega}{r} dV \quad (\text{A.3})$$

On peut simplifier l'équation A.3 en employant la relation suivante:

$$\Omega dV = |\Omega| S ds = \kappa ds$$

dV : élément de volume du filament tourbillonnaire

S : surface perpendiculaire au filament

ds : élément de longueur du fil tourbillonnaire

κ : circulation

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{|\Omega|}{r} S ds = \frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{ds}{r}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \nabla \times \mathcal{A} \\ &= \nabla_x \times \left[\frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{ds(\mathbf{x}^*)}{r} \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_C \nabla_x \left(\frac{1}{r} \right) \times ds(\mathbf{x}^*) \\ \nabla_x \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

La vitesse induite d'un filament tourbillonnaire s'exprime par l'équation suivante:

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{r^3}} \quad (\text{A.4})$$

En employant les relations $ds(\mathbf{x}^*) = \mathbf{t} ds$ et $\mathbf{t} = \partial \mathbf{r} / \partial s$, où \mathbf{t} est le vecteur tangent unitaire, la vitesse induite se modifie pour devenir:

$$d\mathbf{q} = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Cette équation est l'équivalent de la loi de Biot-Savart en électrodynamique:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

La ressemblance est frappante car les deux équations sont équivalents lorsqu'on substitue:

$$\begin{aligned} I &= \kappa \\ \mathbf{B} &= \mathbf{q} \\ d\mathbf{l} &= d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Alors, à partir de maintenant on a une équation A.5 pour l'évaluation de la vitesse induite d'un filament tourbillonnaire.

$$\boxed{\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds} \quad (\text{A.5})$$

Cette dernière équation est le point de départ de plusieurs articles dans la détermination de la vitesse d'un filament tourbillonnaire. De la similitude évidente avec la forme de la loi de Biot-Savart en électromagnétisme, on lui conserve le même nom en mécanique des fluides: "Formule de Biot-Savart".

APPENDICE B

VITESSE INDUITE

L'évaluation de la vitesse sous la forme intégrale de Biot-Savart est peu commode à manipuler et donne souvent des formes intégrales impossibles à résoudre. L'emploi de l'ordinateur est essentiel si on veut s'attaquer à ces équations intégrales directement. Cet appendice développe une approche différente proposée par Hama (1962) pour déterminer la vitesse d'induction et qui porte le nom de "Concept d'induction localisée". Ce concept détermine la vitesse d'induction en fonction du rayon de courbure. On applique ce concept pour des filaments tourbillonnaires parabolique, sinusoïdal et exponentiel. De plus, une forme polaire de la vitesse d'induction est donnée.

Vitesse induite en fonction du rayon de courbure

Concept d'induction localisée

La procédure est inspirée de Hama (1965). La formule de départ est celle de Biot-Savart (A.5). Il faut trouver le vecteur rayon et le vecteur tangentiel (figure B.1) pour un filament quelconque. Le vecteur rayon sur un filament est exprimé comme:

$$\mathbf{r}(\xi, t) = \mathbf{r}(s + \xi, t) - \mathbf{r}(s, t)$$

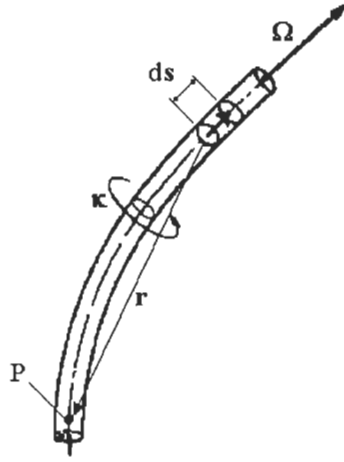


Figure B.1: Composantes d'un filament tourbillonnaire.

où $\xi = \xi(s)$ est le paramètre qui parcourt le filament tourbillonnaire. La valeur de ξ est infime et on fait un développement en série de Taylor du rayon $\mathbf{r}(\xi, t)$ autour du point $\xi = 0$. La variable s est un point du filament et $ds \equiv d\xi$.

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_2 \xi^2 + \dots$$

Les \mathbf{a}_i sont des vecteurs évaluer à $\xi = 0$.

$$\mathbf{a}_1 = \partial \mathbf{r} / \partial \xi \tag{B.1}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2} \partial^2 \mathbf{r} / \partial \xi^2 \tag{B.2}$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{3!} \partial^3 \mathbf{r} / \partial \xi^3$$

$$\vdots = \vdots$$

La courbe doit être sans discontinuité et continûment dérivable. Le vecteur tangentiel \mathbf{t} est la dérivée du vecteur rayon \mathbf{r} .

$$\mathbf{t} = \partial \mathbf{r}(\xi, t) / \partial s$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \partial \mathbf{r}(\xi, t) / \partial \xi \\
&= \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \xi + \dots
\end{aligned}$$

Maintenant, on a les deux vecteurs essentiels pour trouver la vitesse induite. Il nous faut évaluer leur produit vectoriel $\mathbf{t} \times \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \times \mathbf{r} &= (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \xi + \dots) \times (\mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_2 \xi^2 + \dots) \\
&\simeq \underbrace{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1)}_{\equiv 0} \xi + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \xi^2 + O(\xi^3) \\
&\simeq (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \xi^2 + O(\xi^3) \\
&\simeq (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) |\xi|^2
\end{aligned}$$

Il nous faut également la valeur du module du rayon.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}|^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\
&= |(\mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_2 \xi^2 + \dots)|^2 \\
&= |\mathbf{a}_1|^2 |\xi|^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \xi^3 + \dots \\
r &= |\mathbf{a}_1| |\xi| \left(1 + \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|^2} \xi + \dots \right) \\
r^{-3} &= |\mathbf{a}_1|^{-3} |\xi|^{-3} \left(1 - 3 \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|^2} \xi + \dots \right) \\
&\simeq |\mathbf{a}_1|^{-3} |\xi|^{-3}
\end{aligned}$$

On a toutes les variables nécessaires pour déterminer la vitesse induite par la formule de Biot-Savart.

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} ds \\
&\simeq \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|^3} \frac{1}{|\xi|} + O(1) \right] d\xi
\end{aligned}$$

$$\simeq \frac{\kappa}{4\pi} 2 \int_0^\infty \left[\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|^3} \frac{1}{|\xi|} + O(1) \right] d\xi$$

Nous savons que les \mathbf{a}_i sont évalués au point $\xi = 0$. Donc, ils sont indépendants de ξ et peuvent sortir de l'intégrale.

$$\mathbf{q} \simeq \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\mathbf{a}_1 \times (2\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1|^3} \int_0^\infty \left[\frac{1}{|\xi|} + O(1) \right] d\xi$$

Pour éviter la discontinuité au point $\xi = 0$, on donne une dimension au filament tourbillonnaire (σ) qui est le rayon du filament à partir de son centre. On limite l'intégration à une distance finie du point dont on évalue la vitesse induite, ce qui revient à négliger l'induction à longue distance. Les bornes de l'intégration sont de σ jusqu'à 1. On utilise aussi les relations B.1 et B.2.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mathbf{q}}{\kappa} &\simeq \frac{\mathbf{a}_1 \times (2\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1|^3} \int_\sigma^1 \left[\frac{1}{|\xi|} + O(1) \right] d\xi \\ &\simeq \frac{\mathbf{a}_1 \times (2\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1|^3} \ln \frac{1}{\sigma} + O(1) \\ &\simeq \frac{(\partial\mathbf{r}/\partial s) \times (\partial^2\mathbf{r}/\partial s^2)}{|\partial\mathbf{r}/\partial s|^3} \ln \frac{1}{\sigma} + O(1) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nous appelons l'équation B.3: “**Concept d'induction localisée**”. Lorsque $\sigma \ll 1$, le terme qui est de l'ordre de l'unité $O(1)$ est négligeable. La vitesse induite d'un filament de tourbillon par lui-même peut être écrite, après une définition adéquate du temps (exprimé en m^2) comme:

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \frac{(\partial\mathbf{r}/\partial s) \times (\partial^2\mathbf{r}/\partial s^2)}{|\partial\mathbf{r}/\partial s|^3}} \quad (\text{B.4})$$

Cette dernière formulation B.4 est couramment utilisée pour l'évaluation de la vitesse d'induction. Il est à noter que la vitesse induite sur un filament courbé est proportionnelle au rayon de courbure local du filament. Le lien entre les deux est démontré sommairement ci-dessous.

Rayon de courbure

Pour trouver le rayon de courbure d'une courbe, on a besoin des trois relations de Frenet-Serret (voir Spiegel, 1979 et Hurley, 1980).

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \varsigma \mathbf{N} \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N} \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau \mathbf{B} - \varsigma \mathbf{T}$$

Par définition \mathbf{T} est le vecteur unitaire tangent à la courbe, \mathbf{N} le vecteur unitaire normal et \mathbf{B} le vecteur unitaire binormal. Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ est une courbe dans \mathbf{R}^3 qui est dérivable partout. De plus, la distance est une fonction du temps qui s'exprime comme $s = s(t)$ où $ds/dt = |d\mathbf{r}/dt|$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= d\mathbf{r}/ds \\ &= \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} \\ d\mathbf{T}/ds &= d^2\mathbf{r}/ds^2 \\ &= \varsigma \mathbf{N} \\ (d\mathbf{r}/ds) \times (d^2\mathbf{r}/ds^2) &= \mathbf{T} \times \varsigma \mathbf{N} \\ (d\mathbf{r}/ds) \times (d^2\mathbf{r}/ds^2) &= \varsigma \mathbf{T} \times \mathbf{N} \\ &= \varsigma \mathbf{B} \end{aligned}$$

Trouver le module de $d\mathbf{r}/ds$ est l'équivalent de trouver le module de \mathbf{T} qui est un vecteur unitaire et on conclut que $|d\mathbf{r}/ds| = 1$. Maintenant, il est facile de faire le pont entre le rayon de courbure ($1/\varsigma$) et la relation de la vitesse induite trouvée plus haut.

$$\varsigma \mathbf{B} = \frac{(d\mathbf{r}/ds) \times (d^2\mathbf{r}/ds^2)}{|d\mathbf{r}/ds|^3}$$

Ainsi, la vitesse est une fonction de la courbure et elle est dirigée selon la binormale.

$$d\mathbf{r}/dt = \frac{(d\mathbf{r}/ds) \times (d^2\mathbf{r}/ds^2)}{|d\mathbf{r}/ds|^3}$$

Dans certains articles, le dénominateur n'est pas considéré car ce dernier ne change pas la vitesse induite puisqu'il vaut un. Cette dernière équation est très intéressante car c'est une équation différentielle beaucoup simple que l'équation intégrale originale. L'amplitude du coefficient de $\ln(1/\sigma)$ de l'équation B.3 est la courbure $\varsigma = 1/R$ du filament tourbillonnaire. La vitesse d'induction s'écrit comme:

$$\boxed{\frac{4\pi q}{\kappa} = \frac{1}{R} \ln \frac{1}{\sigma} = \varsigma \ln \frac{1}{\sigma}} \quad (\text{B.5})$$

La vitesse d'induction est directement proportionnelle à la courbure. Cette approximation est valable lorsque le rayon du filament σ est extrêmement petit et que l'induction à longue distance est négligée. Il faut dire également que le phénomène de torsion n'est pas pris en compte. De la dernière équation, la vitesse d'induction est maximale à l'endroit où la courbure est la plus forte ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure est le plus faible.

Rayon de courbure dans le plan

Il arrive souvent que le vecteur rayon initial n'a pas de composante dans la direction de l'axe \mathbf{k} . Dans ce cas, le filament tourbillonnaire se définit par rapport aux deux autres axes disponibles. On retrouve souvent cette configuration initiale dans la littérature. Ainsi, le vecteur rayon s'exprime sous la forme de l'équation B.6.

$$\mathbf{r}(x) = f(x)\mathbf{i} + g(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad (\text{B.6})$$

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont arbitraires et sont continûments dérivables. La courbure $\varsigma = 1/R$ pour un tel filament s'exprime par la relation B.7.

$$\varsigma = 1/R = \frac{\left| \frac{df(x)}{dx} \frac{d^2g(x)}{dx^2} - \frac{dg(x)}{dx} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|}{\left[\left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.7})$$

On peut simplifier sa forme en définissant $\partial/\partial t \equiv '.$

$$\varsigma = 1/R = \frac{|f'g'' - g'f''|}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} \quad (\text{B.8})$$

On utilise à maintes reprises la relation B.7 ou B.8 pour différentes formes initiales de filaments tourbillonnaires définis dans un plan. Cette équation facilite et allège de beaucoup les calculs. Une équation similaire peut être développée lorsque le filament a une troisième composante dans la direction \mathbf{k} mais elle n'est pas utile pour nous dans ce qui suit.

Vitesse induite sous forme polaire

On sait que la vitesse induite a une solution analytique proportionnelle au rayon de courbure. Il existe également une solution à l'intégrale de la vitesse induite sous forme polaire. Un tel développement a été introduit par Batchelor (1987). Dans ce qui suit, nous présentons toutes les étapes nécessaires pour y parvenir. Daniel Tousignant, un confrère de maîtrise, a fait un développement similaire.

Forme polaire

On fait appel à la géométrie analytique élémentaire (Florent, 1981). On s'intéresse principalement aux filaments fermés. La vitesse induite pour un point quelconque \mathbf{x} sur un filament de tourbillon fermé s'exprime comme:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{r^3} \quad (\text{B.9})$$

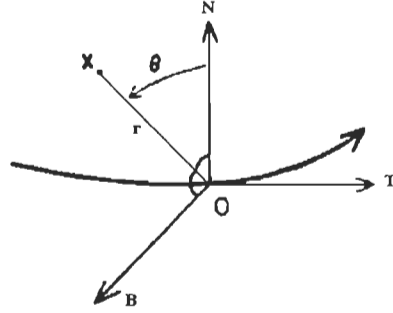


Figure B.2: Croquis de la vitesse induite près d'une ligne de tourbillon.

La circulation est considérée comme nulle à l'extérieur du filament de tourbillon. Nous étudions la vitesse induite dans le voisinage d'un point d'origine sur le filament de tourbillon. Le vecteur \mathbf{r} est la différence entre deux points du filament de tourbillon que l'on peut exprimer par l'équation B.10 et le vecteur $\delta\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)$ est un élément de longueur qui coïncide avec le filament.

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (\text{B.10})$$

Avec le point O comme origine et \mathbf{T} , \mathbf{N} et \mathbf{B} comme vecteurs dans la direction des axes (figure B.2) du filament de tourbillon, le vecteur position d'un point dans le plan normal au filament de tourbillon au point O peut s'écrire comme:

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{N} + x_3 \mathbf{B}$$

La tâche est d'examiner la vitesse au point \mathbf{x} lorsque $x_2^2 + x_3^2 = \sigma^2$ tend vers 0. On utilise un intervalle de longueur l pour l'évaluation de l'intégrale le long du filament à partir de l'origine O qui varie entre $L \geq l \geq -L$. Il s'agit maintenant de déterminer le vecteur position \mathbf{x}^* d'un point sur le filament de tourbillon. La courbe près du point O est un cercle centré à $(0, R)$. L'équation pour un tel cercle est $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ et on évalue y lorsque $x = l$ qui est un point sur le filament près du point O . En développant en série de Taylor cette équation du cercle on trouve $y = R - R + \frac{Rl^2}{2R^2} + \dots$ et cela donne comme valeur de y :

$$y \approx \frac{R l^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \varsigma l^2$$

Maintenant, un point \mathbf{x}^* à proximité du point O , qui se situe sur le filament, a la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= l \mathbf{T} + y \mathbf{N} \\ \mathbf{x}^* &\approx l \mathbf{T} + \frac{1}{2} \varsigma l^2 \mathbf{N} \end{aligned}$$

L'élément de longueur $ds(\mathbf{x}^*)$ est équivalent à la longueur de $d\mathbf{x}^*$. Ainsi, l'élément de longueur $ds(\mathbf{x}^*)$, près du point d'origine, s'exprime comme:

$$\begin{aligned} ds(\mathbf{x}^*) &= \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{dl} dl \\ &\equiv \frac{d\mathbf{x}^*}{dl} dl \\ &\approx (\mathbf{T} + \varsigma l \mathbf{N}) dl \end{aligned}$$

Évaluation de l'argument de l'intégrale

L'argument de l'intégrale de B.9 est défini par:

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^3}$$

On a tous les éléments pour évaluer l'argument de l'intégrale à cette étape.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}^* &\approx -l \mathbf{T} + \left(x_2 - \frac{1}{2} \varsigma l^2\right) \mathbf{N} + x_3 \mathbf{B} \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| &\approx \left[l^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2} \varsigma l^2\right)^2 + x_3^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \approx \left[x_2^2 + x_3^2 + l^2(1 - \varsigma x_2) + \frac{1}{4}\varsigma^2 l^4 \right]^{1/2} \\
(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*) & \approx \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ -l & x_2 - \frac{1}{2}\varsigma l^2 & x_3 \\ 1 & \varsigma l & 0 \end{vmatrix} dl \\
& \approx \left[-x_3 \varsigma l \mathbf{T} + x_3 \mathbf{N} + \left\{ -\varsigma l^2 - x_2 + \frac{1}{2}\varsigma l^2 \right\} \mathbf{B} \right] dl \\
& \approx \left[-x_3 \varsigma l \mathbf{T} + x_3 \mathbf{N} - \left\{ x_2 + \frac{1}{2}\varsigma l^2 \right\} \mathbf{B} \right] dl
\end{aligned}$$

L'expression à intégrer pour la vitesse induite est:

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^3} \approx \frac{\left[-x_3 \varsigma l \mathbf{T} + x_3 \mathbf{N} - \left\{ x_2 + \frac{1}{2}\varsigma l^2 \right\} \mathbf{B} \right] dl}{\left[x_2^2 + x_3^2 + l^2(1 - \varsigma x_2) + \frac{1}{4}\varsigma^2 l^4 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.11})$$

On pose le changement de variables :

$$\begin{aligned}
x_2 &= \sigma \cos(\theta) \\
x_3 &= \sigma \sin(\theta) \\
t &= \frac{l}{\sigma} \\
dl &= \sigma dt
\end{aligned}$$

Lorsque σ tends vers 0 alors $1 - \varsigma \sigma \cos(\theta) \approx 1$ et $\frac{1}{4}\varsigma^2 \sigma^2 t^4 \rightarrow 0$. Après ces simplifications, l'équation B.11 devient:

$$\begin{aligned}
-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}^*)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^3} & \approx \frac{\left[\varsigma t \sin(\theta) \mathbf{T} + \{\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N}\} \sigma^{-1} + \frac{\varsigma t^2}{2} \mathbf{B} \right]}{\left[\underbrace{1 + t^2 \{1 - \varsigma \sigma \cos(\theta)\}}_{\approx (1+t^2)} + \frac{1}{4}\varsigma^2 \sigma^2 t^4 \right]^{3/2}} dt \\
& \approx \frac{\left[\varsigma t \sin(\theta) \mathbf{T} + \{\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N}\} \sigma^{-1} + \frac{\varsigma t^2}{2} \mathbf{B} \right]}{(1 + t^2)^{3/2}} dt
\end{aligned}$$

Évaluation de la vitesse d'induction

L'argument de l'intégrale s'est beaucoup simplifié.

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\kappa} \mathbf{q}(\mathbf{x}) &\approx \int_{-L/\sigma}^{L/\sigma} \frac{\varsigma t \sin(\theta) \mathbf{T} + \{\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N}\} \sigma^{-1} + \frac{\varsigma t^2}{2} \mathbf{B}}{(1+t^2)^{3/2}} dt \\ \frac{4\pi}{\kappa} \mathbf{q}(\mathbf{x}) &\approx \varsigma \sin(\theta) \int_{-L/\sigma}^{L/\sigma} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt \mathbf{T} + \frac{\cos(\theta)}{\sigma} \int_{-L/\sigma}^{L/\sigma} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} dt \mathbf{B} \\ &\quad - \frac{\sin(\theta)}{\sigma} \int_{-L/\sigma}^{L/\sigma} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} dt \mathbf{N} + \frac{\varsigma}{2} \int_{-L/\sigma}^{L/\sigma} \frac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}} dt \mathbf{B}\end{aligned}$$

On utilise les relations intégrales suivantes provenant de Ryznik (1994):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(\sigma^2 + x^2)^{3/2}} dx &= \frac{x}{\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 + x^2)}} \\ \int \frac{x}{(\sigma^2 + x^2)^{3/2}} dx &= \frac{-1}{\sqrt{(\sigma^2 + x^2)}} \\ \int \frac{x^2}{(\sigma^2 + x^2)^{3/2}} dx &= \frac{-x}{\sqrt{(\sigma^2 + x^2)}} + \ln \left(x + \sqrt{(\sigma^2 + x^2)} \right)\end{aligned}$$

Après simplification, la vitesse induite est:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{x}) &\approx \frac{\kappa}{2\pi\sigma} \left[\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N} \right] + \frac{\kappa\varsigma}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{2L}{\sigma} \right) - 1 \right] \mathbf{B} \\ &\approx \frac{\kappa}{2\pi\sigma} \left[\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N} \right] + \frac{\kappa\varsigma}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{L}{\sigma} \right) - 0.3 \right] \mathbf{B}\end{aligned}$$

Pour enlever la dépendance de la vitesse induite par rapport à la variable L , on pose $L \ll R$. Cela ne signifie pas que L est petit pour autant, seulement qu'il doit être beaucoup plus petit que R . En choisissant $L = R \cdot \theta$, on a:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{L}{\sigma}\right) &= \ln\left(\frac{R\theta}{\sigma}\right) \\ &= \ln\left(\frac{R}{\sigma}\right) + \ln(\theta) \\ &\approx \ln\left(\frac{R}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Le facteur $\ln(\theta)$ devient négligeable comparativement à $\ln(\frac{R}{\sigma})$ lorsque σ tend vers 0. En remplaçant ς en fonction du rayon de courbure par la relation $\varsigma = 1/R$, l'expression finale de la vitesse induite sous la forme polaire est:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{\kappa}{2\pi\sigma} [\cos(\theta) \mathbf{B} - \sin(\theta) \mathbf{N}]}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{\kappa}{4\pi R} \left[\ln\left(\frac{R}{\sigma}\right) \right] \mathbf{B}}_{\text{translation}} + \underbrace{O(\sigma)^0 \mathbf{B}}_{\text{longue portée}} \quad (\text{B.12})$$

La contribution à la vitesse au point O à l'extérieur de la région d'intégration $L \geq l \geq -L$ est sûrement bornée et sa contribution est infime. Cette contribution venant de l'extérieur de la région d'intégration peut être incluse dans le terme $O(\sigma)^0$. Cela revient à dire qu'on néglige les effets à longue portée par l'approximation $L \ll R$. La vitesse d'induction en un point \mathbf{x} est principalement influencée par les points qui lui sont adjacents. À une certaine distance, la contribution des autres points devient négligeable. Cette approximation s'apparente à celle du "Concept d'induction localisée".

La partie "rotation" de l'équation B.12 représente la vitesse de rotation du filament sur lui-même. Ce terme n'influence pas le déplacement de la ligne de tourbillon. La partie "translation" représente la vitesse de translation du filament qui est selon la binormale. Ce terme varie avec le rayon de courbure R et la dimension du rayon du filament σ . Si σ diminue, la vitesse de translation augmente et si R diminue, la vitesse de translation augmente aussi car $\frac{\ln(R)}{R}$ diminue lorsque R augmente. Ceci est en accord avec une équation similaire développée par Lamb

(1932, chap. 7). La partie “longue portée” pourrait être remplacée par une constante. Elle tient compte de la partie de l’induction que l’on a négligée.

Le fluide dans le voisinage du point O a une grande vélocité dans la direction de la binormale avec une magnitude asymptotique $\ln(1/\sigma)$. Un filament idéal ($\sigma = 0$) se déplacerait à une vitesse infinie. On considère toujours que le filament a une dimension finie comme on l’a fait ici par l’approximation $\sigma \rightarrow 0$. Si la vorticité κ n’est pas nulle à des points extérieurs à la ligne de tourbillon alors il faudrait les ajouter à la contribution de la vitesse d’induction \mathbf{q} . Mais toutes ces contributions sont finies et négligeables comparativement avec le second terme “translation” de B.12 lorsque σ tend vers 0.

Dans le cas d’un cercle sans perturbation, le filament de tourbillon se déplace uniquement selon la binormale. Lorsque le filament de tourbillon est droit ($R = 0$ alors $\varsigma = \infty$) la vitesse de translation est égale à zéro.

Vitesse induite pour une parabole

Pour illustrer le comportement d’un filament tourbillonnaire sous sa propre induction, on va utiliser l’exemple d’un filament parabolique.

$$y^* = cx^{*2}$$

Nous déduirons la vitesse induite par la formule de Biot-Savart en coordonnées cartésiennes par un développement analytique complet. La solution obtenue est sans approximation et exacte. Nous comparerons ce résultat avec celui obtenu par le “Concept d’induction localisée”. Pour obtenir des variables adimensionnelles, on pose $x = cx^*$ et $y = cy^*$ où c a la dimension de m^{-1} .

$$y = x^2$$

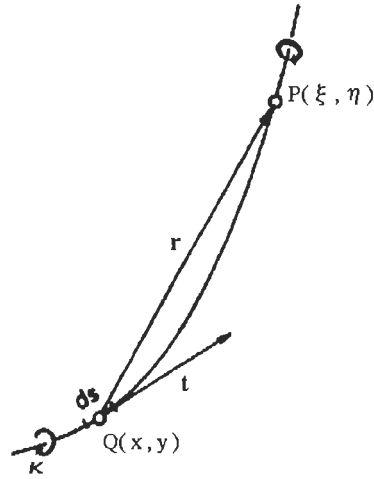


Figure B.3: Vitesse d'induction au point $P(\xi, \eta)$ d'un filament de tourbillon courbe.

Vitesse d'induction par Biot-Savart

Pour trouver la vitesse induite \mathbf{q} au point $P(x, y) = P(\xi, \xi^2)$ pour un filament parabolique ($y = x^2$), il faut d'abord trouver le vecteur unitaire tangent \mathbf{t} à la courbe et le vecteur rayon \mathbf{r} (figure B.3). En posant $x(t) = t$ et $y(t) = t^2$, le vecteur tangent et le vecteur rayon sont:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{j}}{\sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial y^2}{\partial t}}} \\
 &= \frac{\mathbf{i} + 2t \mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}} \\
 \mathbf{r} &= (\xi - t) \mathbf{i} + (\xi^2 - t^2) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\
 r &= |\mathbf{r}| \\
 &= [(\xi - t)^2 + (\xi^2 - t^2)^2]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Le produit vectoriel $\mathbf{t} \times \mathbf{r} ds$ devient:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 \\ \frac{\xi-t}{\xi^2-t^2} & \frac{2t}{\xi^2-t^2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{\xi^2-t^2}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2t(\xi-t)}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \mathbf{k} \\
 ds &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} \\
 ds &= \sqrt{1+4t^2} dt \\
 (\mathbf{t} \times \mathbf{r}) ds &= (\xi^2 - t^2 - 2t\xi + 2t^2) dt \mathbf{k} \\
 &= (\xi - t)^2 dt \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Donc, la vitesse induite est perpendiculaire au plan du filament tourbillonnaire car elle se propage selon la coordonnée \mathbf{k} . Il n'y a pas de vitesse induite selon les autres coordonnées. On sait que $x = t$, l'équation de la vitesse induite selon la variable x dans la direction de l'axe \mathbf{k} est:

$$\frac{4\pi q}{c\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\xi^2 - x^2)^2]^{3/2}} dx \quad (\text{B.13})$$

De cette équation, la vitesse induite a une singularité au point $x = \xi$. La vitesse induite du filament tourbillonnaire sur lui-même devient infinie à ce point. Pour éviter ce problème, on suppose que le filament possède un rayon σ non nul. Cela a pour effet de séparer l'intégrale de part et d'autre de la singularité. En modifiant le dénominateur de l'argument de l'intégrale par la relation B.14, on arrive à une forme plus propice de la vitesse induite.

$$\begin{aligned}
 (\xi - x)^2 + (\xi^2 - x^2)^2 &= (\xi - x)^2 + [(\xi - x)(\xi + x)]^2 \\
 &= (\xi - x)^2 [1 + (\xi + x)^2]
 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{4\pi q}{c\kappa} = \int_{-\infty}^{\xi-\sigma} \frac{dx}{(\xi - x) [(\xi^2 + x^2)^2 + 1]^{3/2}} +$$

$$\int_{\xi+\sigma}^{\infty} \frac{dx}{(x-\xi)[(\xi^2+x^2)^2+1]^{3/2}} \quad (\text{B.15})$$

Dans l'équation B.13, l'argument de l'intégrale est toujours positif. Pour conserver cette propriété, on doit utiliser $x - \xi$ dans le second terme de l'intégrale pour garder le caractère positif de l'argument. En procédant aux changements de variables $t = -\frac{1}{x-\xi}$ pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\xi-\sigma}$ et $u = \frac{1}{x-\xi}$ pour l'intégrale $\int_{\xi+\sigma}^{\infty}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi q}{c\kappa} = & \int_0^{1/\sigma} \frac{t^2}{[1 - 4\xi t + (4\xi^2 + 1)t^2]^{3/2}} dt + \\ & \int_0^{1/\sigma} \frac{u^2}{[1 + 4\xi u + (4\xi^2 + 1)u^2]^{3/2}} du \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On trouve la solution de cette équation intégrale à l'aide des tables d'intégrations prises dans le livre de Ryznik (1994):

$$\begin{aligned} R &= \sigma + bx + cx^2 \\ \Delta &= 4ac - b^2 \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{R^3}} dx &= \frac{(b^2 - \Delta)x^2 + 2ab}{c\Delta\sqrt{R}} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} \pm 2cx \pm b) \quad (\text{B.18})$$

Après un calcul fastidieux, la solution finale de la vitesse d'induction s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi q}{c\kappa} = & \frac{1}{4\xi^2 + 1} \left\{ \frac{4\xi^2 - 2\xi\sigma - 1}{(4\xi^2 - 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2}} + \frac{4\xi^2 + 2\xi\sigma - 1}{(4\xi^2 + 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2}} + \right. \\ & \left. \frac{1}{(4\xi^2 + 1)^{1/2}} \ln \frac{[(4\xi^2 + 1)(4\xi^2 - 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)]^{1/2} + (4\xi^2 - 2\xi\sigma + 1)}{[(4\xi^2 + 1)(4\xi^2 + 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)]^{1/2} - (4\xi^2 + 2\xi\sigma + 1)} \right\} \end{aligned}$$

Cette équation est la solution analytique exacte de la vitesse d'induction pour un filament parabolique. Cette solution intégrale n'est pas la seule valable. Une

autre forme équivalente (équation B.19) a été trouvée et qui est extrêmement longue mais qui se simplifie beaucoup lorsque $\sigma \ll 1$.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi q}{c\kappa} = & \frac{1}{4\xi^2 + 1} \left\{ \frac{4\xi^2 - 2\xi\sigma - 1}{(4\xi^2 - 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2}} + \frac{4\xi^2 + 2\xi\sigma - 1}{(4\xi^2 + 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2}} \right. \\ & + \frac{1}{(4\xi^2 + 1)^{1/2}} \ln \left(\frac{(4\xi^2 + 1)^{1/2}(4\xi^2 - 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2} + (4\xi^2 - 2\xi\sigma + 1)}{\sigma/2} \cdot \right. \\ & \left. \left. \frac{(4\xi^2 + 1)^{1/2}(4\xi^2 + 4\xi\sigma + \sigma^2 + 1)^{1/2} + (4\xi^2 + 2\xi\sigma + 1)}{\sigma/2} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{(4\sigma^2 + 1)^{1/2}} \ln \left([2(4\sigma^2 + 1)^{1/2} - 4\sigma] \cdot [2(4\sigma^2 + 1)^{1/2} + 4\sigma] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Lorsque $\sigma \ll 1$, les termes en σ au numérateur du logarithme sont négligeables et l'équation B.19 devient, en posant $\xi = x$:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi q}{c\kappa} &= \frac{1}{(4x^2 + 1)^{3/2}} \left\{ 2(4x^2 - 1) + \ln \frac{4^2(4x^2 + 1)^2}{\sigma^2} - \ln 4 \right\} \\ &= \frac{2}{(4x^2 + 1)^{3/2}} \left\{ 4x^2 - 1 + \ln \frac{2(4x^2 + 1)}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On a présentement une forme simple de la vitesse d'induction pour un filament parabolique. La dimension du filament est déterminée par σ/c . Le rayon du filament est directement proportionnel à la valeur de σ . Il faut noter que la valeur de σ ne peut pas être nulle. La vitesse induite est d'autant plus grande que le rayon du filament est plus faible. La vitesse induite pour différentes valeurs de σ est montrée à la figure B.4. La figure B.5 montre la vitesse induite normalisée $q(x)/q(0)$ pour plusieurs valeurs de σ . Pour des valeurs de σ extrêmement petites, l'équation B.20 se simplifie davantage en employant la relation suivante:

$$\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) \gg 4x^2 - 1 + \ln[2(4x^2 + 1)]$$

Avec cette approximation, l'équation B.20 devient:

$$\boxed{\frac{4\pi q}{c\kappa} \approx \frac{2}{(4x^2 + 1)^{3/2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \quad (\text{B.21})$$

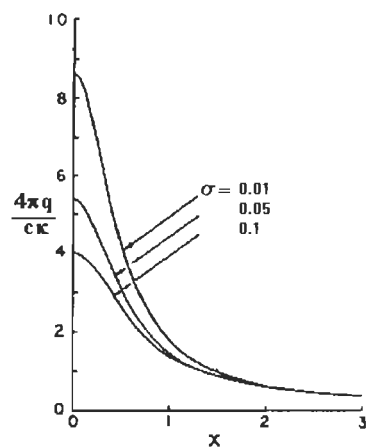


Figure B.4: Vitesse induite sur un tourbillon parabolique.

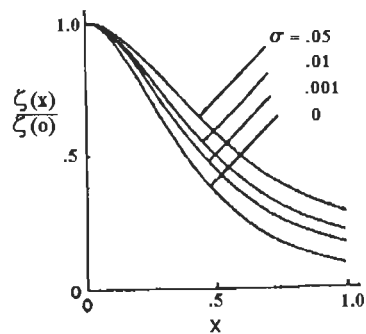


Figure B.5: Vitesse induite normalisée.

Pour des courbes moins simples que la parabole, l'intégration de la formule de Biot-Savart devient rapidement très complexe et possède rarement une solution analytique.

Vitesse d'induction par le "Concept d'induction localisée" pour la parabole

Dans cette section, le "Concept d'induction localisée" donne le même résultat dans le cas d'une parabole que la méthode de l'intégrale de Biot-Savart. Il nous faut trouver le rayon de courbure d'une parabole et comparer ce résultat avec l'équation B.21. Le vecteur rayon pour une parabole s'écrit comme:

$$\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \quad (\text{B.22})$$

En utilisant la relation B.7, on arrive facilement à déterminer la courbure.

$$\varsigma = \frac{1}{R} = \frac{2}{(4x^2 + 1)^{3/2}} \quad (\text{B.23})$$

En comparant les équations B.5 et B.21, on constate aisément que les deux formulations sont identiques. De plus, la vitesse induite maximale pour une parabole est au point (0, 0) qui constitue l'endroit de la plus forte courbure.

Par ce cas simple, on a montré qu'il existe effectivement un lien entre le rayon de courbure et la vitesse induite. Lorsqu'on fait l'approximation que la dimension du filament est infime et que l'on néglige l'induction à longue portée, on voit qu'il y a correspondance entre la formule intégrale de Biot-Savart et le "Concept d'induction localisée". De plus, les calculs sont nettement moindres par la dernière méthode.

Rayon de courbure et surface

Il existe une façon graphique de trouver la courbure et par le fait même la vitesse induite (figure B.6). Cette dernière ne fait appel à aucune dérivée et à aucune

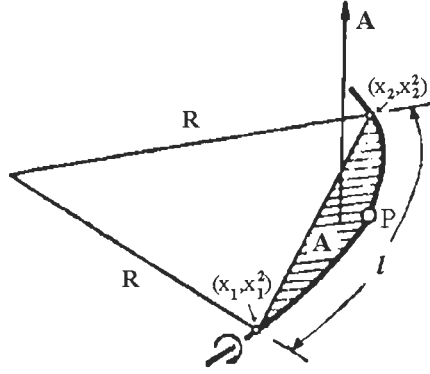


Figure B.6: Surface engendrée par un filament courbe.

intégrale. Elle est très intéressante si on veut l'implanter sur ordinateur pour en faire une simulation.

De chaque côté du point P , on choisit deux points $x_1 = x - a$ et $x_2 = x + b$, où a et b sont des constantes positives. Pour la parabole, la surface A s'évalue comme:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x^2}^{(x_1+x_2)x - x_1x_2} dy dx$$

$$A = \frac{(a+b)^3}{6}$$

La longueur d'arc (l) est:

$$l = [(\delta x)^2 + (\delta y)^2]^{1/2}$$

$$= [(x_2 - x_1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)]^{1/2}$$

$$l = (a+b)[1 + 4x^2]^{1/2}$$

Connaissant la relation $1/R = 2/(4x^2 + 1)^{3/2}$ pour une parabole, il s'en suit:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{12A}{l^3}} \quad (\text{B.24})$$

Le point x_1 est à proximité de x_2 pour éviter l'induction à longue distance. Le vecteur surface \mathbf{A} est normal au plan et décrit l'amplitude et la direction de l'induction.

On peut exprimer la vitesse par des variables adimensionnelles en partant du fait que la vitesse d'induction \mathbf{q} est proportionnelle à $d\mathbf{r}/dt$ en utilisant les variables adimensionnelles suivantes:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^* &= c\mathbf{r} \\ t_{adi} &= \frac{3}{\pi}c^2\kappa t \ln(1/\sigma)\end{aligned}$$

L'équation B.21 de la vitesse induite avec ces variables adimensionnelles peut se réécrire comme:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{c\kappa} \frac{\mathbf{r}}{dt} &= \frac{12\mathbf{A}}{l^3} \ln(1/\sigma) \\ \frac{1}{\frac{3}{\pi}c^2\kappa \ln(1/\sigma)} \frac{d(c\mathbf{r})}{dt} &= \frac{\mathbf{A}}{l^3} \\ \frac{d\mathbf{r}^*}{dt_{adi}} &= \frac{\mathbf{A}}{l^3}\end{aligned}$$

La méthode de la détermination de la vitesse induite par la surface est une alternative qu'on utilise lorsqu'on n'a pas la fonction qui décrit le filament tourbillonnaire. Cela peut être le cas lorsqu'on a seulement une série de points pour déterminer la forme du filament tourbillonnaire. Elle permet de trouver la vitesse d'induction aisément et sans modèles numériques compliqués.

Vitesse induite pour un filament de forme gaussienne et sinusoïdale

Dans cette section, d'autres courbes sont présentées comme la gaussienne B.25 et la sinusoïde B.26 qui sont plus souvent employés que la parabole. Ces courbes servent d'introduction à la théorie de la perturbation. Sur un filament droit,

la courbe gaussienne est considérée comme une perturbation locale et la courbe sinusoïdale comme une perturbation périodique.

$$\text{Gaussienne:} \quad y = a e^{-x^2}, \quad z = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\text{Sinusoïde:} \quad y = 2a \cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right), \quad z = 0 \quad (\text{B.26})$$

On analyse l'impact de la valeur de l'amplitude a sur la vitesse d'induction. La dimension du filament tourbillonnaire est considérée comme infime mais non nulle et les effets à longue portée sont négligés. Cela nous permet d'utiliser le "Concept d'induction localisée". Chacune des étapes de développement mathématique est faite pour les deux courbes simultanément.

Nous savons qu'un filament droit n'induit pas de vitesse de translation. Alors, s'il y a induction, cela provient de la perturbation. Les petites valeurs d'amplitude par rapport à l'unité sont considérées comme de petites perturbations et l'équation de la vitesse d'induction peut être linéarisée. Les amplitudes qui ne sont pas négligeables par rapport à l'unité sont les cas non-linéaires. Cela implique une autre interprétation des résultats.

Vitesse d'induction

On utilise l'équation B.7 pour trouver la vitesse d'induction pour les courbes B.25 et B.26 qui est directement proportionnelle à la courbure ς .

Pour la forme gaussienne

$$\begin{aligned} f &= x & f' &= 1 & f'' &= 0 \\ g &= a e^{-x^2} & g' &= -2ax e^{-x^2} & g'' &= -2a[1 - 2x^2] e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varsigma(x) &= \frac{f'g'' - g'f''}{[f'^2 + g'^2]^{3/2}} \\ \varsigma(x) &= -2a(1 - 2x^2) e^{-x^2} \cdot [1 + 4a^2x^2 e^{-2x^2}]^{-3/2} \\ \varsigma(0) &= -2a \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

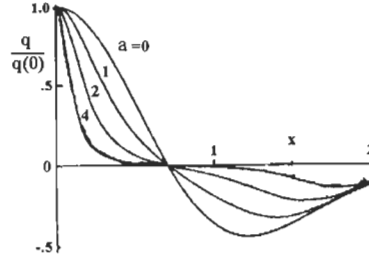


Figure B.7: Vitesse induite initiale pour une perturbation gaussienne en fonction de x .

L'illustration de la variable de x en fonction de la vitesse d'induction est montrée à la figure B.7 pour différentes valeurs d'amplitude. En utilisant l'équation B.5, il est facile de montrer que:

$$\frac{q(x)}{q(0)} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(0)}$$

On peut exprimer la courbure sous une forme différente en remplaçant la variable x par y/a . La figure B.8 représente la variable y/a en fonction de la vitesse d'induction.

$$\begin{aligned} y/a &= e^{-x^2} \quad \text{donc} \quad -x^2 = \ln(y/a) \\ \zeta(y/a) &= -2a(y/a)[1 + 2\ln(y/a)] \cdot [1 - 4a^2(y/a)^2 \ln(y/a)]^{-3/2} \\ \zeta(0) &= -2a \end{aligned}$$

Pour la forme sinusoïde

$$\begin{aligned} f &= x & f' &= 1 & f'' &= 0 \\ g &= 2a \cos(\frac{\pi}{4}x) & g' &= \frac{-a\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{4}x) & g'' &= \frac{-a\pi^2}{8} \cos(\frac{\pi}{4}x) \end{aligned}$$

$$\zeta(x) = -2a \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cos(\frac{\pi}{4}x) \cdot \left[1 + 4a^2 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin^2(\frac{\pi}{4}x)\right]^{-3/2} \quad (\text{B.28})$$

$$\zeta(0) = -2a \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

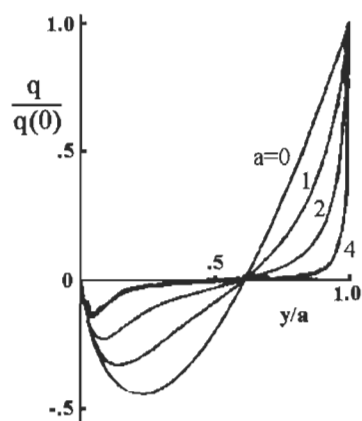


Figure B.8: Vitesse induite initiale pour une perturbation gaussienne en fonction de y/a .

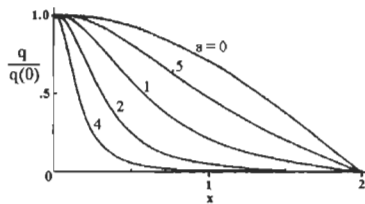


Figure B.9: Vitesse induite initiale pour une perturbation sinusoïdale.

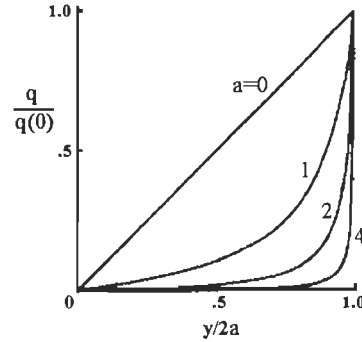


Figure B.10: Vitesse induite initiale pour une perturbation sinusoïdale en fonction de $y/2a$.

La figure B.9 donne une représentation de la vitesse d'induction en fonction de la variable x . Comme pour la gaussienne, on exprime la courbure en fonction de la variable $y/2a$ au lieu de x . La figure B.10 montre la relation de l'induction par rapport à la variable $y/2a$.

$$\begin{aligned}
 y/2a &= \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad \text{donc} \quad 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1 - (y/2a)^2 \\
 \varsigma(y/2a) &= -2a \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 (y/2a) \cdot \left[1 + 4a^2 \left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 [1 - (y/2a)^2]\right]^{-3/2} \\
 \varsigma(0) &= -2a \left(\frac{\pi}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

La nature de la distribution de la vitesse induite est similaire pour de faibles valeurs d'amplitude a . Dans le cas de la perturbation sinusoïdale, la vitesse induite se réduit à une droite lorsque le terme a^2 est négligé.

$$\frac{\varsigma}{\varsigma(0)} = \frac{y}{2a}$$

Cela correspond à une rotation solide dans le plan de la structure sinusoïdale et aucune autre déformation ne prend place. Lorsque le terme a^2 devient non

négligeable, la distribution de la vitesse induite acquiert une courbure de forme concave. Donc, le plan de la configuration sinusoïdale tourne et se déforme dans un motif d'hélice. Un cas intéressant se présente lorsque l'amplitude a augmente et que a^2 devient grand par rapport à l'unité. Dans ce cas, la vitesse induite est confinée à une région très étroite près du centre du filament de tourbillon et est essentiellement nulle ailleurs. Les figures B.8 et B.10 montrent que cette portion étroite se courbe rapidement ce qui est complètement différent lorsque l'amplitude a est faible.

Petite perturbation

Dans le cas de petite valeur de a , l'équation du mouvement d'un filament de tourbillon peut être linéarisée. Le but est de trouver les équations d'ondes générales en coordonnées cartésiennes qui nous donnent l'évolution des déformations avec le temps. On utilise la relation B.4 comme point de départ:

$$\partial \mathbf{r} / \partial t = \frac{(\partial \mathbf{r} / \partial s) \times (\partial^2 \mathbf{r} / \partial s^2)}{|\partial \mathbf{r} / \partial s|^3} \quad (\text{B.29})$$

Si l'amplitude a est petite, s devient essentiellement égale à x . Le vecteur rayon \mathbf{r} est représenté comme une composante linéaire avec une perturbation et chacune des composantes de l'équation B.29 devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} \\ r_x &= x + \epsilon x^*(x, y, z, t) \\ r_y &= y + \epsilon y^*(x, y, z, t) \\ r_z &= z + \epsilon z^*(x, y, z, t) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= \epsilon \frac{\partial x^*}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial y^*}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial z^*}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= [1 + \epsilon \frac{\partial x^*}{\partial x}] + \epsilon \frac{\partial y^*}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial z^*}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| \simeq 1$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2}$$

où ϵx^* représente la perturbation lorsque ϵ tend vers zéro. En remplaçant dans l'équation B.29, la vitesse d'induction devient:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 + \epsilon \frac{\partial x^*}{\partial x} & \epsilon \frac{\partial y^*}{\partial x} & \epsilon \frac{\partial z^*}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} & \epsilon \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} & \epsilon \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0 \mathbf{i} - \epsilon \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \mathbf{k} \quad (\text{B.31})$$

Les termes en ϵ^2 sont négligeables. On fait la correspondance entre chacune des coordonnées des équations B.30 et B.31.

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} = -\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}$$

Les valeurs affectés de * sont de l'ordre de grandeur des variables linéaires x, y, z . On enlève les * aux variables et en gardant à l'esprit que ces variables sont fonctions de x, y, z, t et qu'elles correspondent à des perturbations. Les équations différentielles deviennent:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il est préférable d'exprimer les variables y et z en fonction de x et t seulement.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2(\partial y/\partial t)}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2(\partial^2 z/\partial x^2)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial(\partial^2 y/\partial x^2)}{\partial t} &= -\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}} \quad (\text{B.32})$$

En utilisant la même technique, l'équation différentielle pour la variable y est:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}} \quad (\text{B.33})$$

Ces deux équations différentielles B.32 et B.33 sont les équations d'ondes générales en coordonnées cartésiennes pour de faibles perturbations. La résolution de ces équations différentielles est montrée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{z} &= \pm \int_0^\infty \cos(\alpha x) \frac{\cos}{\sin}(\alpha^2 t) F(\alpha) d\alpha \\
F(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos(\alpha x) dx
\end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

où $f(x)$ est la configuration initiale. Les équations de polarisation B.34 montrent la déformation en fonction du temps et de la position. Les conditions pour appliquer ces équations générales sont:

$$\begin{array}{lll}
y(x, 0) = a f(x) & y(0, t) = a g(t) & y(\pm\infty, t) \text{ fini} \\
z(x, 0) = 0 & z(0, t) = 0 & z(\pm\infty, t) \text{ fini}
\end{array}$$

Petite perturbation gaussienne

On prend une configuration initiale gaussienne comme perturbation afin de trouver les équations de polarisation:

$$y(x, 0) = f(x) = a e^{(-b^2 x^2)}, \quad z = 0 \quad \text{à} \quad t = 0$$

Des formules provenant de Ryznik (1994) permettent l'évaluation des équations B.34:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\beta x^2} \cos(\alpha x) dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{(-\frac{\alpha^2}{4\beta})} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0] \\ \int_0^\infty e^{-\beta x^2} \cos(ax^2) \cos(bx) dx &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(\beta^2 + a^2)^{1/4}} e^{(-\frac{\beta b^2}{4(\beta^2 + a^2)})} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a}{\beta}\right) - \frac{ab^2}{4(\beta^2 + a^2)}\right) \\ \int_0^\infty e^{-\beta x^2} \sin(ax^2) \cos(bx) dx &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(\beta^2 + a^2)^{1/4}} e^{(-\frac{\beta b^2}{4(\beta^2 + a^2)})} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a}{\beta}\right) - \frac{ab^2}{4(\beta^2 + a^2)}\right) \end{aligned}$$

À l'aide de ces intégrales, une solution est déduite pour la configuration initiale gaussienne:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= (a/b\pi^{1/2}) e^{-(\alpha^2/4b^2)} \\ \begin{matrix} y(x, t) \\ z(x, t) \end{matrix} &= \underbrace{a(1 + \tau^2)^{-1/4} e^{-\left(\frac{b^2 x^2}{1 + \tau^2}\right)}}_{\text{rayon}} \underbrace{\cos(\alpha x) \frac{\cos\left(\frac{b^2 x^2 \tau}{1 + \tau^2} - \phi\right)}{\sin\left(\frac{b^2 x^2 \tau}{1 + \tau^2} - \phi\right)}}_{\text{hélice}} \quad (\text{B.35}) \\ \text{où} \quad \phi &= 1/2 \arctan(\tau) \\ \tau &= 4b^2 t \end{aligned}$$

On a présentement la configuration de la déformation du filament de tourbillon en fonction du temps et de la position selon x pour une petite perturbation gaussienne. Un mouvement hélicoïdal apparaît dans le plan yz . Puisque $0 \leq \phi \leq \pi/4$ varie faiblement avec le temps, l'amplitude de la fonction trigonométrique est essentiellement contrôlée par le premier terme du rayon de l'hélice. Le facteur $\tau/(1 + \tau^2)$ croît linéairement au départ pour atteindre un maximum de 0.5 pour $\tau = 1$ et décroît ensuite avec le temps. Donc, l'hélice se déplace du centre de la perturbation vers les $x = \pm\infty$. Il est à noter qu'aucune particule ne se déplace

avec cette hélice. Cela est semblable à une onde qui se déplace sur un fil tendu. Dans la limite où $\tau \rightarrow \infty$, le premier terme de l'amplitude disparaît et l'hélice ne se perpétue pas.

Le premier facteur $(1 + \tau^2)^{-1/4}$ montre que l'amplitude décroît avec le temps comme $t^{-1/2}$. En même temps, la variation de la fonction exponentielle $e^{-\left(\frac{b^2 x^2}{1+\tau^2}\right)}$ est telle que la largeur de la perturbation gaussienne augmente avec le temps. Puisque le taux d'élargissement est presque linéairement proportionnel au temps et est plus rapide que le taux de décroissance $(1 + \tau^2)^{-1/4}$, alors la déviation augmente sur l'axe des x pour atteindre un maximum égal à $2|bx|^{-1/2} e^{-1/4}$ pour $\tau = (4b^2 x^2 - 1)^{1/2}$ et diminue pour des valeurs plus grandes de τ . Le produit des deux premiers facteurs détermine le rayon de l'hélice qui augmente au début. Suite à une augmentation du rayon de l'hélice au début, celui-ci s'en va diminuant le long de l'axe des x . Éventuellement, le filament de tourbillon va s'approcher de plus en plus d'un filament droit.

Petite perturbation sinusoïdale

Nous considérerons deux configurations initiales de perturbations sinusoïdales. La première en est une selon l'axe des y exclusivement. La seconde comporte deux perturbations, une selon l'axe des y et une autre selon l'axe des z .

PREMIÈRE:

Cette perturbation initiale est donnée par:

$$y(x, 0) = f(x) = a \cos(\alpha x), \quad z(x, 0) = 0$$

La relation de polarisation est trouvée par une technique qui est souvent utilisée en considérant une solution cyclique dans les dérivées. Cette technique est simple et elle s'apparente à la transformée de Fourier. Naturellement, il faut s'assurer que les conditions initiales sont respectées. L'équation d'onde B.33 est le point de départ dont la solution a une forme:

$$y(x, t) = \text{Re} \left[a e^{i[\alpha x - \omega t]} \right]$$

On déduit les relations suivantes à partir de B.33.

$$\begin{aligned}
 \partial^2 y / \partial t^2 &= -\omega^2 y \\
 \partial^4 y / \partial x^4 &= \alpha^4 y \\
 \omega &= \pm \alpha^2 \\
 y(x, t) &= \operatorname{Re} [a e^{i[\alpha x \pm \alpha^2 t]}] \\
 y(x, t) &= a \cos(\alpha x \pm \alpha^2 t) \\
 y(x, t) &= a \cos(\alpha[x \pm \alpha t]) \quad (\text{B.36}) \\
 y(x, t) &= a[\cos(\alpha x) \cos(\alpha^2 t) \pm \sin(\alpha x) \sin(\alpha^2 t)] \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

On arrive à la même forme pour la variable z en utilisant la relation B.32.

$$z(x, t) = a[\cos(\alpha x) \cos(\alpha^2 t) \pm \sin(\alpha x) \sin(\alpha^2 t)]$$

Pour satisfaire la condition initiale $y(x, 0) = a \cos(\alpha x)$, il ne faut considérer que la partie en “cosinus” de l’équation B.37.

$$\boxed{y(x, t) = a \cos(\alpha x) \cos(\alpha^2 t)} \quad (\text{B.38})$$

Trouver la relation de polarisation pour z n’est pas très difficile en sachant que $\partial z / \partial t = \partial^2 y / \partial x^2$, donc:

$$\boxed{z(x, t) = -a \cos(\alpha x) \sin(\alpha^2 t)} \quad (\text{B.39})$$

En combinant les deux dernières équations B.38 et B.39, le filament subit une rotation rétrograde avec une vitesse angulaire α^2 et ne possède pas de vitesse de déplacement.

DEUXIÈME:

Nous prenons maintenant la configuration initiale suivante à $t = 0$:

$$y(x, 0) = f(x) = a \cos(\alpha x), \quad z(x, 0) = a \sin(\alpha x)$$

La solution de la relation de polarisation pour y est simplement celle qui a déjà été trouvée plus haut (équation B.36).

$$y(x, t) = a \cos(\alpha[x \pm \alpha t]) \quad (\text{B.40})$$

De même, la relation de polarisation pour z est:

$$z(x, t) = a \sin(\alpha[x - \alpha t]) \quad (\text{B.41})$$

Les équations B.40 et B.41 satisfont les conditions initiales. L'hélice a encore un mouvement de rotation rétrograde autour de l'axe des x mais voyage dans la direction des x positifs à vitesse constante. Ce qui n'était pas le cas pour une perturbation en y exclusivement. Dans tous les cas, aucune particule de fluide ne se déplace le long de l'axe des x .

En conclusion, il y a la présence d'une hélice qui prend naissance à l'endroit de la plus forte courbure et se progage par la suite en s'éloignant de ce point. Elle prend de l'ampleur et s'atténue par la suite lorsque $x \rightarrow \infty$ pour la perturbation gaussienne. Pour la perturbation sinusoïdale en y seulement, la perturbation ne se déplace pas. Mais si z subit une perturbation au départ, on voit qu'elle effectue un mouvement hélicoïdal qui voyage à vitesse constante.

Perturbation importante

En prenant une valeur d'amplitude non négligeable comme $a = 4$, on ne peut plus simplifier aussi aisément. Dans le cas de la vitesse induite de la forme gaussienne (équation B.27), le second terme $1 + 4a^2x^2 e^{-2x^2}$ devient prédominant, excepté dans la région près du maximum de courbure. Le même phénomène peut s'observer dans le cas de la sinusoïde (équation B.28). En conséquence, la vitesse induite est confinée dans une région étroite qui fait courber la portion du sommet très rapidement.

Il y a une courbure rapide du filament dans le cas gaussien qui génère une vitesse selon l'axe des x qui forme une bosse dans le filament. Cette bosse cause

plus tard des courbures dans les deux autres plans et qui produisent des motifs complexes de déformation du filament tourbillonnaire.

Dans les deux cas (sinusoïde et gaussien) la configuration en hélice et des motifs très complexes apparaissent lorsque l'amplitude de la perturbation a devient grande par rapport à l'unité. Cependant, le patron en hélice est maintenu pour des valeurs d'amplitudes a plus petites ou égales à deux. Le patron en hélice ne se déplace pas et reste présent dans le cas sinusoïdal à cause de la nature périodique de la perturbation. Dans le cas gaussien, l'hélice voyage vers les $x \rightarrow \pm\infty$ et l'amplitude de cette hélice s'atténue durant sa course selon l'axe x .

APPENDICE C

PROPRIÉTÉS INVARIANTES

Quelques propriétés intéressantes peuvent être obtenues avec le concept d'induction localisée concernant le comportement d'un filament de tourbillon courbe sous sa propre induction. On démontre que la longueur et la surface d'un filament tourbillonnaire sont invariantes au cours du temps. Ces propriétés sont développées pour les cas où le filament est lisse et les dérivées d'ordre supérieur existent.

Invariance de la longueur du filament avec le temps

Cette partie a été développée à partir d'une communication personnelle avec Daniel Tousignant. Dans les développements qui vont suivre, on a besoin d'une propriété du produit vectoriel et du concept d'induction localisée.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Une écriture simplifiée de l'équation du "Concept d'induction localisée" (B.4, p. 78):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= \lambda \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \\ \mathbf{r}' &= \partial \mathbf{r} / \partial s \\ \lambda &= |\mathbf{r}'|^{-3}\end{aligned}$$

L'invariance de la variation du vecteur rayon par rapport au temps se formule comme suit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial |\mathbf{r}'|}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2|\mathbf{r}'|} \cdot \left(\mathbf{r}' \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} + \mathbf{r}' \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \\
 &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s \partial t} \\
 &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\
 &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\lambda \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \\
 &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot (\lambda' \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' + \lambda \underbrace{\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''}_{\equiv 0} + \lambda \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''') \\
 &= \frac{\lambda'}{|\mathbf{r}'|} [\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')] + \frac{\lambda}{|\mathbf{r}'|} [\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''')] \\
 &= \frac{\lambda'}{|\mathbf{r}'|} \left[\mathbf{r}'' \cdot \underbrace{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')}_{\equiv 0} \right] + \frac{\lambda}{|\mathbf{r}'|} \left[\mathbf{r}''' \cdot \underbrace{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')}_{\equiv 0} \right] \\
 \frac{\partial |\mathbf{r}'|}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

Le module de la variation du vecteur rayon ne change pas avec le temps. Par conséquent, la longueur du filament reste inchangée au cours du temps malgré que le filament tourbillonnaire peut subir des déformations. La longueur d'arc du filament est définie comme:

$$l(t) = \int_{s_1}^{s_2} |\mathbf{r}'| ds$$

La variation de la longueur d'arc dans le temps est:

$$\frac{dl(t)}{dt} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial |\mathbf{r}'|}{\partial t} ds$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = 0$$

Donc, il n'y a pas de variation de la longueur du filament dans le temps. Il est à noter que les limites d'intégration sont arbitraires et que l'invariance ne s'applique pas seulement sur la longueur entière du filament mais également sur n'importe quelle portion du filament. Alors, un filament de tourbillon ne s'étire pas et ne se contracte pas sous sa propre induction. Malgré que le filament peut se déformer avec le temps, sa longueur reste un invariant. Cette propriété est essentielle pour comprendre le comportement de déformation d'un filament tourbillonnaire dans le temps. Il faut noter que l'on est dans un cas idéal sans viscosité. En réalité, on observe une légère augmentation de la longueur avec le temps.

Invariance de la surface projetée avec le temps

La surface d'un triangle (figure C.1) est représentée par le produit vectoriel:

$$\text{Surface} = A = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|$$

Définissons un vecteur $\mathbf{p}(t)$ perpendiculaire au plan (équation C.1) qui est une représentation de la surface totale projetée de la courbe. Le module de $\mathbf{p}(t)$ est la projection de l'aire maximale. Il est à noter que la courbe doit être fermée.

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2} \oint_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') ds \quad (\text{C.1})$$

La variation du vecteur $\mathbf{p}(t)$ en fonction du temps est:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \oint_C \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') ds \\ &= \oint_C \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{r}' \right) ds + \oint_C \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \right) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

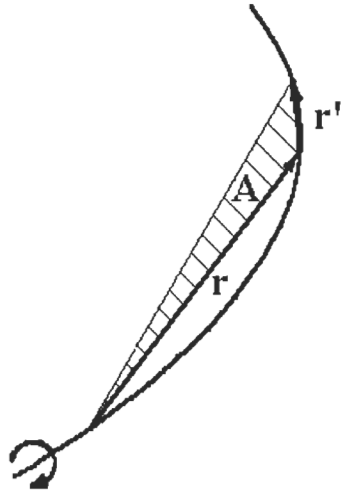


Figure C.1: Surface par le produit de 2 vecteurs.

Commençons par l'évaluation de I_2 .

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C \mathbf{r} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial s} ds \\ &= \oint_C \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} ds \end{aligned}$$

Par l'utilisation d'une des propriétés du produit vectoriel, la forme de l'argument de l'intégrale dans I_2 change pour:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) &= \mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{r} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s \partial t} \\ \mathbf{r} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Donc, l'expression de I_2 devient après cette substitution:

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) ds \\ &= I_3 + \oint_C \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{r}' ds \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que la valeur de I_3 est nulle car l'intégration se fait sur une courbe fermée.

$$\begin{aligned} I_3 &= \oint_C \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En remplaçant dans I_2 , on obtient:

$$I_2 = I_1$$

L'expression de la variation de la surface en fonction du temps se simplifie. On utilise également l'équation du "Concept d'induction localisée".

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \oint_C \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{r}' ds \\ &= \oint_C (\lambda \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' ds \end{aligned}$$

Sans perdre de généralisation, nous posons $|\mathbf{r}'| = 1$ et par conséquent λ est une constante. Il est montré en géométrie analytique (Spiegel, 1979) que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \\ \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{T}' &= \mathbf{r}'' = \varsigma \mathbf{N} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

À l'aide de ces relations, on montre que:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \oint_C \left(\lambda \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \times \varsigma \mathbf{r}'' \right) \times \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_C (\lambda \mathbf{T} \times \varsigma \mathbf{N}) \times \mathbf{T} ds \\
&= \oint_C (\lambda \varsigma \mathbf{B}) \times \mathbf{T} ds \\
&= \oint_C (\lambda \varsigma \mathbf{N}) ds \\
&= \oint_C (\lambda \mathbf{r}'') ds \\
&= \oint_C (\lambda \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}') ds \\
&= \lambda \oint_C d\mathbf{r}' \\
\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur \mathbf{p} qui représente la surface du filament fermé, ne subit pas de variation dans le temps. Alors, la surface du filament tourbillonnaire est invariante dans le temps. Cette affirmation n'est valable que pour des filaments fermés.

Corollaire

Considérons un vecteur \mathbf{u} comme une mesure de l'oscillation du filament tourbillonnaire. Mathématiquement, on peut exprimer ce vecteur \mathbf{u} adimensionnel comme le rapport de la surface sur la longueur au carré du filament tourbillonnaire.

$$\mathbf{u}(t) = \frac{2\pi}{l(t)^2} \oint_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') ds$$

Le vecteur $\mathbf{u}(t)$ est constant par ce qui a été montré plus haut.

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = 0$$

Alors, il n'y a pas de variation de la mesure de l'oscillation avec le temps. L'inégalité isopérimétrique (équation C.2) fait un lien entre la surface et la longueur.

$$l^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

La surface maximale que l'on peut générer dans le plan pour une certaine longueur l est un cercle. Pour une courbe fermée, la surface et la longueur se définissent comme:

$$A = \frac{1}{2} \oint_C |\mathbf{r} \times \mathbf{r}'| ds$$

$$l = \oint_C |\mathbf{r}'| ds$$

Il existe un lien entre le vecteur $\mathbf{u}(t)$ et l'inégalité isopérimétrique.

$$|\mathbf{u}(t)| = \frac{4\pi}{l^2} A \leq \frac{4\pi}{l^2} \frac{l^{*2}}{4\pi} = \frac{l^{*2}}{l^2} \quad \text{où} \quad l^* = l^*(t)$$

La variable l^* est la longueur du périmètre projeté sur un plan de la courbe fermée et l est la longueur du filament réelle. L'égalité survient lorsque $l = l^*$, c'est-à-dire lorsque la longueur projetée sur un plan est celle du filament réel en trois dimensions. Cela se produit lorsque le filament est un cercle. Donc, il n'y a pas d'oscillation du filament lorsqu'il y a égalité. En aucun temps l^* est plus grand que l et cela implique que $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$. La mesure de \mathbf{u} n'est pas seulement constante mais est aussi plus petite que un. La signification de ce corollaire est qu'un anneau de tourbillon non circulaire à l'origine n'atteint jamais la forme circulaire. Ainsi, le mouvement oscillatoire initial d'un tourbillon non circulaire ne cesse jamais. Alors, suite à une perturbation quelconque du filament tourbillonnaire, ce dernier oscille sans s'arrêter. Cependant, dans un fluide réel, il est possible que le mouvement oscillatoire soit amorti et que le tourbillon devienne un cercle par la présence de la viscosité.

APPENDICE D

PERTURBATION

Cette section est consacrée à l'étude de la déformation du filament tourbillonnaire sous sa propre induction avec la présence d'une perturbation. On débute par l'analyse de petites perturbations pour un filament tourbillonnaire en coordonnées cylindriques. Ces coordonnées sont plus appropriées pour traiter les anneaux de tourbillons.

Les équations d'ondes généralisées ainsi que les équations de polarisation des perturbations sont trouvées en coordonnées cylindriques pour les perturbations de faible amplitude. Les équations d'ondes en coordonnées cartésiennes ont déjà été déterminées comme introduction à la théorie des perturbations. On termine par l'étude d'un filament elliptique.

Nous nous inspirerons principalement des développements faits par Hama (1965). Tout le développement se fait avec le concept d'induction localisée. Nous compléterons par des commentaires sur le comportement d'un filament tourbillonnaire lors de sa déformation.

Analyse linéarisée

En général, les équations sont non linéaires et sont difficiles à résoudre analytiquement. Cependant, une solution explicite a été obtenue pour le cas d'un filament de tourbillon presque droit avec des perturbations de forme gaussienne

et sinusoïdale. Une analyse similaire est présentée pour un anneau de tourbillon perturbé. La définition du vecteur rayon est:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \rho(\theta, t) \mathbf{e}_\rho + z(\theta, t) \mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= [R + r(\theta, t)] \mathbf{e}_\rho + [ct + \zeta(\theta, t)] \mathbf{k}\end{aligned}\tag{D.1}$$

- ρ : distance radiale de l'axe du cylindre de rayon R
- z : distance parallèle à l'axe central
- r : déviation (perturbation) radiale
- ζ : déviation (perturbation) de translation
- c : vitesse pour un anneau de tourbillon circulaire $\approx 1/R$

Nous utilisons $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv '$ et $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \dot{}$ pour simplifier l'écritures. La vitesse d'induction est définie à partir des relations suivantes et de l'équation B.4.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_\rho &= \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}'_\theta &= -\mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{r}' &= r' \mathbf{e}_\rho + (R + r) \mathbf{e}_\theta + \zeta' \mathbf{k}\end{aligned}\tag{D.2}$$

$$\mathbf{r}'' = [r'' - (R + r)] \mathbf{e}_\rho + 2r' \mathbf{e}_\theta + \zeta'' \mathbf{k}\tag{D.3}$$

$$|\mathbf{r}'|^3 \approx (R + r)^3$$

$$\theta = s/R \quad \text{donc} \quad \partial s = R \partial \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{(\partial \mathbf{r})/(\partial s) \times (\partial^2 \mathbf{r})/(\partial s^2)}{|(\partial \mathbf{r}/\partial s)|^3} &= \frac{(\partial \mathbf{r})/(\partial \theta) \times (\partial^2 \mathbf{r})/(\partial \theta^2)}{|(\partial \mathbf{r}/\partial \theta)|^3} \\ &= \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^3}\end{aligned}\tag{D.4}$$

Tous les éléments sont présents pour calculer la vitesse d'induction à partir de l'équation D.4 en utilisant les équations D.2 et D.3.

$$\frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{(R+r)^3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ r' & (R+r) & \zeta' \\ r'' - (R+r) & 2r' & \zeta'' \end{vmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Les produits de perturbations sont négligées pour ne garder que le premier ordre.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{(R+r)^3} \left[(R+r)\zeta'' \mathbf{e}_\rho - (R+r)\zeta' \mathbf{e}_\theta + [-(R+r)r'' + (R+r)^2] \mathbf{k} \right] \quad (\text{D.6})$$

Nous allons prendre la dérivée par rapport au temps du vecteur rayon (équation D.1):

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_\rho + (c + \dot{\zeta}) \mathbf{k} \quad (\text{D.7})$$

En faisant la correspondance terme à terme de D.6 avec D.7, on a un système de deux équations à deux inconnues. Le terme en \mathbf{e}_θ n'est pas considéré puisqu'il ne donne aucune information supplémentaire.

$$\dot{r} = \frac{(R+r)}{(R+r)^3} \zeta'' \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} c + \dot{\zeta} &= -\frac{(R+r)r''}{(R+r)^3} + \frac{(R+r)^2}{(R+r)^3} \\ &= -\frac{r''}{(R+r)^2} + \frac{1}{R+r} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

On suppose que la perturbation est faible comparativement au rayon local ($R \gg r$). De plus, on sait que pour un tourbillon circulaire parfait, la vitesse $c = 1/R$. La démonstration est simple. Pour un anneau parfait, les perturbations sont nulles $r = 0, \zeta = 0$. Alors, le vecteur rayon s'écrit comme: $\mathbf{r} = R \mathbf{e}_\rho + ct \mathbf{k}$ et par conséquent $\dot{\mathbf{r}} = c \mathbf{k}$. Par le concept d'induction, l'équation D.4 nous donne la courbure. Pour un cylindre la courbure vaut $1/R$ et $c = 1/R$ comme il fallait s'y attendre pour un cercle.

En se servant de l'approximation $R \gg r$ dans les équations D.8 et D.9, on simplifie pour donner les équations D.10 et D.11.

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{1}{R^2} \zeta'' \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}\end{aligned}\tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= -\frac{r''}{(R+r)^2} + \frac{1}{R+r} - c \\ &= -\frac{r''}{R^2} + \frac{1}{R+r} - \frac{1}{R} \\ &= -\frac{r''}{R^2} - \frac{r}{R^2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - \frac{r}{R^2}\end{aligned}\tag{D.11}$$

L'étape suivante est d'isoler r et ζ en fonction de t et de θ pour avoir les équations d'ondes. En multipliant l'équation D.11 par $\partial^2/\partial \theta^2$ et en employant la relation D.10, on isole la variable perturbatrice (r ou ζ) pour donner les équations d'ondes D.12 et D.13.

$$R^4 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 r}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}\tag{D.12}$$

$$R^4 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 \zeta}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}\tag{D.13}$$

Ces équations représentent la forme générale des équations d'ondes en coordonnées cylindriques pour de petites perturbations. À partir de configurations initiales, on peut déterminer la relation de dispersion et de polarisation.

Résolution des équations d'ondes

On résout les équations d'ondes pour la configuration initiale sinusoïdale suivante:

$$r(\theta, 0) = a \cos(m\theta) \qquad \zeta(\theta, 0) = 0\tag{D.14}$$

L'amplitude de la perturbation a est beaucoup plus petite que le rayon de l'anneau R . Nous cherchons à trouver la relation de dispersion dans un premier temps. Nous posons au départ que la solution de la perturbation radiale a une forme exponentielle et nous ajustons la solution par la suite pour satisfaire les conditions initiales.

$$r(\theta, t) = \text{Re} \left[a e^{i(m\theta - \omega t)} \right] \quad (\text{D.15})$$

Nous l'appliquons dans l'équation d'onde D.12 pour le rayon.

$$\begin{aligned} R^4 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= -R^4 \omega^2 r(\theta, t) \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} &= -m^2 r(\theta, t) \\ \frac{\partial^4 r}{\partial \theta^4} &= m^4 r(\theta, t) \\ -R^4 \omega^2 &= m^2 - m^4 \\ \boxed{\omega = \pm \frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2}} & \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Cette équation est la relation de dispersion qui relie la fréquence ω et le mode m .

Équations de polarisation

En remplaçant dans l'équation D.15, on a:

$$r(\theta, t) = \text{Re} \left[a e^{i(m\theta \mp \frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t)} \right]$$

Cette équation est la forme générale de la relation de polarisation pour $r(\theta, t)$. Il existe deux cas à considérer ici selon la valeur du mode. Le premier est pour $m \geq 1$ et le second, pour $m < 1$. Ces deux cas donnent des équations de polarisation ainsi que des interprétations différentes du comportement du filament tourbillonnaire.

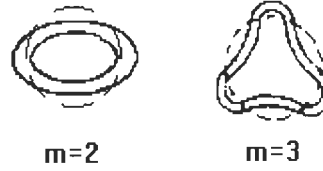


Figure D.1: Nombre d'onde m sur un anneau circulaire.

PREMIER CAS: $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 r(\theta, t) &= a \cos \left(m\theta \mp \frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \\
 &= a \cos \left(\frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta) \pm a \sin \left(\frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \sin(m\theta)
 \end{aligned}$$

La partie en “cosinus” est suffisante pour satisfaire les conditions initiales de l'équation D.14.

$$\boxed{r(\theta, t) = a \cos \left(\frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta)} \quad (\text{D.17})$$

De la relation D.11, la relation de polarisation de $\zeta(\theta, t)$ est:

$$\boxed{\zeta(\theta, t) = a \frac{(m^2 - 1)^{1/2}}{m} \sin \left(\frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta)} \quad (\text{D.18})$$

Les équations D.17 et D.18 sont les relations de polarisation des perturbations radiale $r(\theta, t)$ et axiale $\zeta(\theta, t)$. Une représentation du nombre d'onde m est montrée à la figure D.1. Pour un filament fermé, la perturbation doit avoir un mode entier tel que $m = 1, 2, 3, \dots$. Dans ce cas, les perturbations radiale $r(\theta, t)$ et axiale $\zeta(\theta, t)$ oscillent sans amplification avec le temps. La période d'oscillation T définie par l'équation D.19 est fonction du mode et du rayon R du filament. Naturelle-

ment, $m = 1$ est le cas trivial du déplacement uniforme d'un anneau de tourbillon circulaire.

$$T = 2\pi \frac{R^2}{m(m^2 - 1)^{1/2}} \quad (\text{D.19})$$

Dans le cas d'un anneau fermé, il est intéressant de vérifier si la surface projetée et la longueur restent constantes. Ce sont deux invariants qui ont déjà été démontrés. Nous commençons par la surface projetée qu'on peut exprimer par:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R+r} \tilde{r} d\tilde{r} d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + r/R)^2 d\theta \\ &= \pi R^2 [1 + O(a/R)^2] \end{aligned}$$

En posant $r(\theta, t) \approx a$ et $a \ll R$ dans le cas d'une petite perturbation, la surface reste constante et est approximativement celle d'un cercle parfait. Le deuxième invariant est la longueur d'arc l .

$$l = \int |\mathbf{r}'| d\theta$$

Le vecteur \mathbf{r}' est défini à partir de la relation D.2 comme:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= r' \mathbf{e}_\rho + (R + r) \mathbf{e}_\theta + \zeta' \mathbf{k} \\ |\mathbf{r}'| &= \sqrt{r'^2 + (R + r)^2 + \zeta'^2} \\ |\mathbf{r}'| &= (R + r) \end{aligned}$$

Le produit croisé des perturbations est négligé. On détermine la longueur d'arc pour un cercle complet en posant $r \approx a$.

$$l = \int_0^{2\pi} (R + r) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= R \int_0^{2\pi} (1 + a/R) d\theta \\
&= 2\pi R [1 + O(a/R)]
\end{aligned}$$

La longueur d'arc est constante et est approximativement celle d'un cercle.

DEUXIÈME CAS: $m < 1$

Il est à noter que l'anneau de tourbillon n'a pas besoin d'être complet. L'approximation par le concept d'induction localisée dépend seulement de la configuration locale du filament de tourbillon et néglige les effets à longue distance. Donc, il est parfaitement légitime de considérer une configuration locale qui n'est pas périodique autour de l'anneau. Dans ce cas, m peut avoir des valeurs inférieures à l'unité. Cela donne d'autres équations de polarisation.

Pour $m \leq 1$, la relation de dispersion D.16 nous indique que ω est une valeur imaginaire.

$$\begin{aligned}
\omega &= \pm \frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} \\
\omega &\equiv \pm \frac{im(1 - m^2)^{1/2}}{R^2} \quad \text{si } m \leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la perturbation radiale s'écrit:

$$\begin{aligned}
r(\theta, t) &= \operatorname{Re} \left[a e^{im\theta} e^{\frac{m(1-m^2)^{1/2}}{R^2} t} \right] \\
r(\theta, t) &= \operatorname{Re} \left[a e^{im\theta} \left\{ \sinh \left(\frac{m(1-m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) + \cosh \left(\frac{m(1-m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) \right\} \right] \\
r(\theta, t) &= a \cos(m\theta) \left\{ \sinh \left(\frac{m(1-m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) + \cosh \left(\frac{m(1-m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) \right\}
\end{aligned}$$

La partie en \cosh est suffisante pour satisfaire les conditions initiales de l'équation D.14.

$$r(\theta, t) = a \cosh \left(\frac{m(1 - m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta) \quad (\text{D.20})$$

La relation de polarisation de $\zeta(\theta, t)$ en utilisant l'équation différentielle D.11 devient:

$$\zeta(\theta, t) = a \frac{(1 - m^2)^{1/2}}{m} \sinh \left(\frac{m(1 - m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta) \quad (\text{D.21})$$

Cette solution a un comportement singulier. Les perturbations augmentent constamment avec le temps pour un angle donné. La valeur de ζ au point $\theta = 0$, qui est le sommet de la configuration, augmente de manière monotone. Alors, étant donné que le filament a une longueur fixe, ce point se soulève plus haut que le reste du filament de tourbillon pour se diriger vers le centre. Cela génère des courbures dans les autres plans qui affectent le comportement du filament tourbillonnaire.

Rayon de courbure

Jusqu'à présent, on a trouvé les équations de polarisation des perturbations qui nous indiquent le comportement des perturbations radiale et axiale au cours du temps. Ici, on présente une analyse du rayon de courbure. On retrouve encore deux solutions différentes selon la valeur du mode. Nous voulons trouver une équation générale pour le rayon de courbure \mathcal{R} . Nous avons besoin d'une relation de Frenet-Serret et de l'équation de r'' qu'on retrouve à D.3.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{R^2} \mathbf{r}'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R^2} \left([r'' - (R + r)] \mathbf{e}_\rho + 2r' \mathbf{e}_\theta + \zeta'' \mathbf{k} \right) \\
&= \varsigma \mathbf{N} \\
\left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| &= \varsigma = 1/\mathcal{R}
\end{aligned}$$

L'objectif est de trouver la formulation du rayon de courbure \mathcal{R} en fonction du rayon de la perturbation r . Dans la relation précédente, on néglige les valeurs des coordonnées en \mathbf{e}_θ et \mathbf{k} car elles sont nettement inférieures à celle de \mathbf{e}_ρ .

$$\begin{aligned}
\varsigma &= \frac{1}{R^2} \sqrt{\underbrace{r''^2}_{\approx 0} - 2(R + r)r'' + (R + r)^2} \\
\frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{R + r}{R^2} \sqrt{1 - \frac{2r''}{R + r}} \\
\mathcal{R} &\cong \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{2r''}{R + r}}} \\
&\cong R \left[1 + \frac{r''}{R + r} + \dots \right] \\
&\cong R \left[\frac{R + r + r'' + \dots}{R + r} \right] \\
&\cong R \left[\frac{R}{R + r} + \frac{r}{R + r} + \frac{r''}{R + r} + O(r/R)^2 \right] \quad \text{où } r'' = -m^2 r \text{ (D.22)} \\
\mathcal{R} &\cong R \left[1 + \frac{(1 - m^2)r}{R} + O(a/R)^2 \right] \tag{D.23}
\end{aligned}$$

À présent, il ne reste plus qu'à substituer les valeurs du rayon de la perturbation selon la valeur du mode des équations D.17 et D.20 dans l'équation D.23 pour avoir la variation de la courbure en fonction des paramètres du filament. Ainsi, on a deux comportements différents du rayon de courbure \mathcal{R} selon la valeur du mode m .

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{m \geq 1} &= R \left\{ 1 + \frac{a}{R} (1 - m^2) \cos \left(\frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta) + O(a/R)^2 \right\} \\
\mathcal{R}_{m < 1} &= R \left\{ 1 + \frac{a}{R} (1 - m^2) \cosh \left(\frac{m(1 - m^2)^{1/2}}{R^2} t \right) \cos(m\theta) + O(a/R)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Pour $m < 1$, on voit que le rayon de courbure augmente de façon monotone avec le temps. Cette tendance a déjà été confirmée par une déformation progressive d'une configuration initiale parabolique $y = x^2$. Lorsque $m \geq 1$ et entier, le rayon de courbure oscille continûment dans le temps sans amplification.

Calcul du flux

On veut connaître l'influence des perturbations l'une sur l'autre et pour ce faire on calcule le flux de $\langle r\zeta \rangle$ qui est une mesure du transport d'une perturbation par rapport à l'autre. Il y a deux cas à prendre en compte selon que la valeur du mode est entier ou non. Le calcul du flux se fait comme suit où T est la période.

$$\langle r\zeta \rangle = \frac{\int_0^T r\zeta dt}{\int_0^T dt} \quad (\text{D.24})$$

PREMIER CAS: $m \geq 1$

La période pour ce cas est:

$$T = 2\pi \frac{R^2}{m(m^2 - 1)^{1/2}}$$

On fait le changement de variable suivant pour simplifier les équations.

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} t = \frac{m(m^2 - 1)^{1/2}}{R^2} t$$

Les perturbations r et ζ se réécrivent en fonction de α comme:

$$\begin{aligned} r &\propto \cos(\alpha) \\ \zeta &\propto \sin(\alpha) \\ \text{Donc } \langle r\zeta \rangle &\propto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'intégrale du flux étant nulle, il n'y a pas de transport de perturbations. Cela a pour effet de montrer la stabilité de ce cas lorsque le mode m est entier.

DEUXIÈME CAS: $m < 1$

La période n'est pas définie étant donné que le filament n'est pas fermé et par conséquent:

$$T = \infty$$

Comme précédemment, on fait le changement de variable:

$$\alpha = \frac{m(1 - m^2)^{1/2}}{R^2} t$$

Les perturbations se transforment sous la nouvelle variable α et le calcul du flux devient:

$$\begin{aligned} r &\propto \cosh \alpha \\ \zeta &\propto \sinh \alpha \\ \langle r\zeta \rangle &\propto \frac{1}{T} \int_0^T \cosh \alpha \sinh \alpha d\alpha \\ &> 0 \end{aligned}$$

Le flux est plus grand que zéro car le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont toujours plus grands que zéro. Donc, il y a instabilité et le système explose avec le temps. Plus la valeur du flux est grande et plus le filament est instable rapidement. C'est également ce que Hama (1962) a observé.

Vitesse induite pour une ellipse

Nous considérons la vitesse induite pour une distribution initiale d'un tourbillon elliptique d'excentricité variable (figure D.2). On présente que les principales

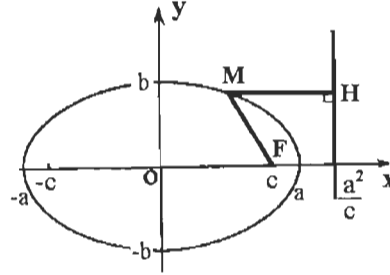


Figure D.2: Excentricité $e = \frac{\|MF\|}{\|MH\|}$ d'une ellipse : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

étapes car les équations elliptiques sont des équations difficiles et lourdes à manipuler mathématiquement.

Cette section est particulièrement instructive pour la présente recherche car l'ellipse peut être vue comme une approximation d'une fente rectangulaire. Une ellipse, en coordonnées cylindriques, s'exprime comme:

$$\begin{aligned} x &= x_o \cos(\theta) & x_o &= cte \\ y &= y_o \sin(\theta) & y_o &= cte \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Pour que cette équation décrive une ellipse, il faut que $y_o = x_o(1 - e^2)^{1/2}$ où e est l'excentricité (Florent, 1981). Pour une ellipse, l'excentricité est une constante inférieure à l'unité. De ce fait, l'angle d'excentricité φ est tel que:

$$\begin{aligned} e &= \cos(\varphi) \\ y_o &= x_o \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Sous le “Concept d'induction localisée”, la vitesse induite est inversement proportionnelle au rayon de courbure. La vitesse induite d'une ellipse est dans la direction de l'axe z et son amplitude découle de l'équation du rayon de courbure B.8 développée plus tôt.

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad \text{où} \quad ' = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

On applique la précédente relation pour trouver la courbure pour une ellipse en fonction de l'excentricité e et de la variable unique x .

$$\begin{aligned} x' &= -x_o \sin(\theta) \\ x'' &= -x_o \cos(\theta) \\ y' &= y_o \cos(\theta) \\ y'' &= -y_o \sin(\theta) \quad \text{où} \quad y_o = x_o \sin(\phi) \\ x'y'' - x''y' &= x_o^2 \sin(\phi) \equiv x_o^2 (1 - e^2) \\ (x'^2 - y'^2)^{3/2} &= x_o^3 [1 - e^2 \cos^2(\theta)]^{3/2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{x_o} (1 - e^2)^{1/2} [1 - e^2 \cos^2(\theta)]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{x_o} (1 - e^2)^{1/2} [1 - e^2 (x/x_o)^2]^{-3/2} \\ \frac{x_o}{R} &= (1 - e^2)^{1/2} [1 - e^2 (x/x_o)^2]^{-3/2} \\ \frac{x_o}{R} &= (1 - e^2)^{1/2} [1 - e^2 (1 - y/y_o)^2]^{-3/2} \end{aligned}$$

La distribution de x_o/R pour plusieurs valeurs d'angles d'excentricité est montrée aux figures D.3 et D.4. Nous définissons l'axe majeur comme étant l'axe x et comme l'axe mineur l'axe y . Par convention, on définit la valeur de x_o plus grande que y_o qui donne une ellipse allongée à l'horizontale.

Lorsque l'excentricité augmente (φ diminue) la vitesse induite devient très grande près du sommet de l'axe majeur. Plus l'excentricité d'une ellipse est grande et plus il y a une différence entre la vitesse induite aux extrémités et le reste du filament. Avec des excentricités faibles, l'ellipse se rapproche d'un anneau circulaire et l'analyse des petites perturbations est applicable.

Lorsque l'excentricité est aussi petite que 0.2, la déviation par rapport à un anneau circulaire est moins de un pourcent. Ainsi, la théorie des petites per-

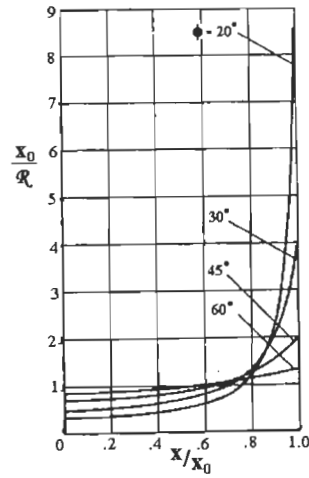


Figure D.3: Vitesse induite initiale d'un anneau elliptique par rapport à l'axe majeur x (Hama, 1965).

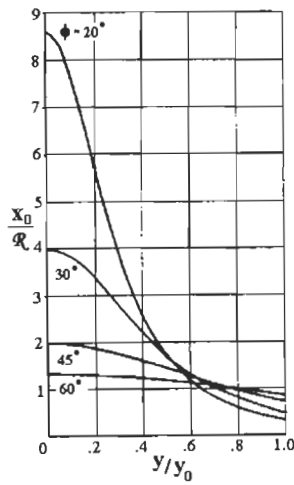


Figure D.4: Vitesse induite initiale d'un anneau elliptique par rapport à l'axe mineur y (Hama, 1965).

Tableau D.1: Conditions initiales d'un filament elliptique (Hama, 1965).

	I	II	III	IV	V
Excentricité : e	0.2	0.5	0.707	0.866	0.940
φ	78.5	60	45	30	20
x_o/y_o	1.021	1.155	1.414	2.000	2.924
Surface: $\pi x_o y_o / 4$	20	20	20	20	20
Longueur d'arc	15.8	15.9	16.2	17.3	19.3

turbations peut être appliquée sans problème. Lorsque l'excentricité approche de 0.5, la théorie des petites perturbations donne encore des résultats raisonnablement précis. Pour des excentricités plus grandes (voir table D.1), les déformations du filament de tourbillon deviennent complexes d'autant plus que l'excentricité augmente. Néanmoins, une certaine périodicité subsiste et on constate que les axes majeur-mineur alternent même lorsque l'excentricité augmente. Au cours d'une oscillation du filament, la forme originale est d'autant moins bien reproduite que l'excentricité est plus grande. De plus, il y a augmentation de la période d'oscillation avec l'excentricité (figure D.5). Pour de petites perturbations de modes entiers, la période est:

$$T = 2\pi R^2 / m(m^2 - 1)^{1/2}$$

Il serait plus pertinent d'exprimer la période comme une fonction de l'excentricité. Tout d'abord, nous définissons un rayon effectif R_{eff} pour l'ellipse comme:

$$\begin{aligned} R_{eff} &= \frac{1}{2}(x_o + y_o) \\ &= \frac{x_o}{2}[1 + (1 - e^2)^{1/2}] \end{aligned} \quad (D.25)$$

La surface pour une ellipse vaut:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{x_o} \int_0^{\frac{y_o}{x_o}[x_o^2 - x^2]^{1/2}} dy dx \\
&= \frac{1}{4} \pi x_o y_o \\
&= \frac{1}{4} \pi x_o^2 (1 - e^2)^{1/2} \\
\frac{x_o^2}{4} &= \frac{A}{\pi (1 - e^2)^{1/2}} \tag{D.26}
\end{aligned}$$

La même valeur de surface a été choisie pour toutes les ellipses. La période T est réécrite en fonction de la surface et de l'excentricité. Pour ce faire, nous utilisons les relations D.25 et D.26 et remplaçons R par R_{eff} pour un mode deux ($m = 2$). En utilisant la relation $e = \cos(\varphi)$, on exprime la période en fonction de l'angle d'excentricité.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi R^2}{m(m^2 - 1)^{1/2}} \\
T_{m=2} &= \frac{2\pi \frac{x_o^2}{4}}{2(3^{1/2})} [1 + (1 - e^2)^{1/2}]^2 \\
T_{m=2} &= \frac{A}{3^{1/2}} \frac{[1 + (1 - e^2)^{1/2}]^2}{(1 - e^2)^{1/2}} \\
T_{m=2} &= \frac{A}{3^{1/2}} \frac{1 + \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)}
\end{aligned}$$

Ainsi, la période est fonction de l'excentricité et elle augmente avec celle-ci. Selon l'article de Hama (1965), il faut faire un ajustement supplémentaire à la période par un facteur multiplicatif constant. La figure D.5 présente les résultats. L'anneau elliptique n'a plus un comportement linéaire à partir du moment où la période varie avec l'angle d'excentricité. Cet angle se situe à environ $\phi = 35$ degrés ce qui correspond à une excentricité d'environ $e = 0.82$. Cette valeur est la frontière entre les perturbations faibles et fortes. De $35 \leq \varphi \leq 90$ ou $1 \leq x_o/y_o \leq 1.774$, on peut appliquer la théorie des petites perturbations.

Un anneau de tourbillon elliptique oscille même lorsque l'excentricité est grande mais la déformation du filament devient très complexe. L'ellipse oscille

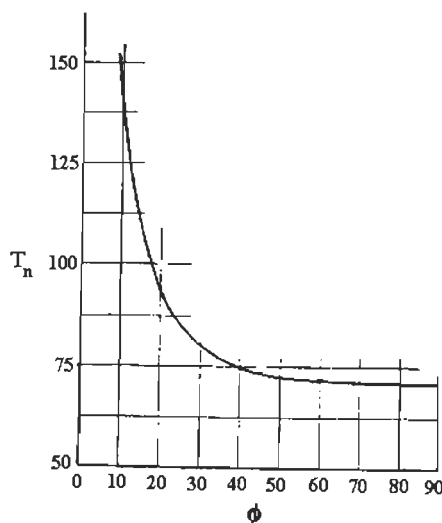


Figure D.5: Dépendance de la période d'oscillation apparente d'un anneau de tourbillon elliptique sur l'excentricité (Hama, 1965).

peu importe l'excentricité si on n'égale l'instabilité et la viscosité qui peuvent détruire le filament.

Cependant, lorsque l'excentricité est petite, l'ellipse n'oscille pas d'une manière aussi simple que l'on serait enclin à le croire. Par exemple, dans le processus d'alternance de l'orientation des axes, l'axe mineur n'atteint pas sa plus grande valeur en même temps que l'axe majeur atteint sa plus faible valeur. Il y a un décalage de phase. Ce décalage augmente à mesure que l'excentricité augmente. Cette différence de phase pourrait s'expliquer par la différence d'échelle de temps entre l'axe majeur, dont la vitesse induite est forte due à sa courbure, et l'axe mineur qui progresse plus lentement.

Anneau circulaire par le concept d'induction localisé

Dans cette section, on analyse un anneau circulaire de rayon unitaire ($R = 1$) avec une petite perturbation par le "Concept d'induction localisée". Le but est de connaître la déformation du filament au cours du temps. Le développement qui suit est un complément de l'article de Kambe (1971).

Petite déformation d'un anneau de vortex circulaire

On utilise les coordonnées cylindriques où $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}$ sont les vecteurs unitaires selon les axes (figure D.6). Le vecteur position unitaire $\mathbf{r}(t, s)$ affecté d'une petite perturbation ($\epsilon \ll 1$) s'écrit comme:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, s) &= \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{e}_r(s) + \epsilon \mathbf{x}(t, s) \\ &= \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{e}_r(s) + \epsilon \left[u(t, s) \mathbf{e}_r(s) + v(s, t) \mathbf{e}_\theta(s) + w(s, t) \mathbf{k} \right] \quad (\text{D.27}) \end{aligned}$$

Le mouvement de translation est représenté par le vecteur \mathbf{x}_0 . Le vecteur $\mathbf{x} = (u, v, w)$ est le vecteur position selon les trois coordonnées de la perturbation. On utilise la notation $\dot{} \equiv \partial/\partial t$ et $\prime \equiv \partial/\partial \theta$ pour simplifier l'écriture. En coordonnées cylindriques, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r' &= \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\theta' &= -\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

La variable s est fonction de θ et $ds/d\theta = |\partial \mathbf{r} / \partial \theta|$ qui est une mesure de la variation de l'élongation du filament selon l'angle. L'équation B.4 (p. 78) de la vitesse induite se modifie pour s'adapter au système de coordonnées cylindriques.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2}$$

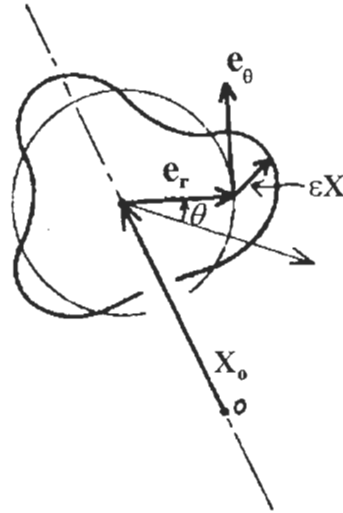


Figure D.6: Représentation d'un anneau circulaire perturbé en coordonnées cylindriques.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{(ds/d\theta)^3} \quad (\text{D.28})$$

Vitesse induite

Pour le calcul de la vitesse induite, il faut évaluer les trois fonctions \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' et $ds/d\theta$ qui apparaissent dans l'équation D.28.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta + w \mathbf{k} \\ \mathbf{x}' &= (u' - v) \mathbf{e}_r + (u + v') \mathbf{e}_\theta + w' \mathbf{k} \\ \mathbf{x}'' &= (-u + u'' - 2v') \mathbf{e}_r + (2u' - v + v'') \mathbf{e}_\theta + w'' \mathbf{k} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{e}_\theta + \epsilon \mathbf{x}' \\ \mathbf{r}'' &= -\mathbf{e}_r + \epsilon \mathbf{x}'' \\ |\mathbf{r}'| &= [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}']^{1/2} \\ &= [1 + 2\epsilon \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{x}' + \epsilon^2 |\mathbf{x}'|^2]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + 2\epsilon(u + v') + \epsilon^2 |\mathbf{x}'|^2 \right]^{1/2} \\
\frac{ds}{d\theta} &= s' = |\mathbf{r}'| \\
\frac{1}{s'} &\simeq 1 - \epsilon(u + v') + O(\epsilon^2) \\
\frac{1}{s'^3} &\simeq 1 - 3\epsilon(u + v') + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \epsilon(u - v) & 1 + \epsilon(u + v') & \epsilon w' \\ -1 + \epsilon(-u + u'' - 2v') & \epsilon(2u' - v + v'') & \epsilon w'' \end{vmatrix} \\
&= \epsilon w'' \mathbf{e}_r - \epsilon w' \mathbf{e}_\theta + [1 + \epsilon(2u - u'' + 3v')] \mathbf{k} \quad (\text{D.29})
\end{aligned}$$

L'équation D.29 s'exprime en fonction des variables \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' comme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r \times \mathbf{x}' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ u' - v & u + v' & w' \end{vmatrix} \\
\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{x}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -u + u'' - 2v' & 2u' - v + v'' & w'' \end{vmatrix} \\
\mathbf{e}_r \times \mathbf{x}' + \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{x}'' &= w'' \mathbf{e}_r - w' \mathbf{e}_\theta + (2u - u'' + 3v') \mathbf{k} \quad (\text{D.30})
\end{aligned}$$

On réécrit l'équation D.29 en utilisant la relation D.30.

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \mathbf{k} + \epsilon [\mathbf{e}_r \times \mathbf{x}' + \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{x}''] \quad (\text{D.31})$$

La vitesse induite, en négligeant les ordres supérieurs en ϵ , selon le concept d'induction localisée est:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{s'^3} = [1 - 3\epsilon(u + v')] \mathbf{k} + \epsilon [\mathbf{e}_r \times \mathbf{x}' + \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{x}''] \quad (\text{D.32})$$

De l'équation D.28, il faut trouver la dérivée par rapport au temps du vecteur rayon D.27.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{x}}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \dot{u} \mathbf{e}_r + \dot{v} \mathbf{e}_\theta + \dot{w} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Étant donné que les formules D.32 et D.33 sont égales, on fait une correspondance terme à terme en utilisant la relation D.30.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{x}} &= -3(u + v') \mathbf{k} + [\mathbf{e}_r \times \mathbf{x}' + \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{x}''] \\ &= -3(u + v') \mathbf{k} + [w'' \mathbf{e}_r - w' \mathbf{e}_\theta + (2u - u'' + 3v') \mathbf{k}] \\ \dot{u} \mathbf{e}_r + \dot{v} \mathbf{e}_\theta + \dot{w} \mathbf{k} &= w'' \mathbf{e}_r - w' \mathbf{e}_\theta + (-u - u'') \mathbf{k} \end{aligned}$$

Équation d'onde

Pour satisfaire la dernière équation, il faut:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= w'' \\ \dot{v} &= -w' \\ \dot{w} &= -u - u'' \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Le terme $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{k}$ montre bien qu'un anneau sans perturbation a une vitesse selon l'axe \mathbf{k} perpendiculaire au plan du filament de tourbillon. On peut simplifier davantage les relations D.34 pour les mettre sous une forme plus facile à résoudre.

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= -\dot{u} - (\dot{u})'' \\
\ddot{w} &= -w'' - w'''
\end{aligned}
\tag{D.35}$$

De même, on déduit:

$$\ddot{u} = -u'' - u''' \tag{D.36}$$

$$\ddot{v} = -v'' - v''' \tag{D.37}$$

Ces dernières équations sont les équations d'onde. Il y a une similitude avec les formules D.12 et D.13 (p. 118) définies dans un cadre plus générale.

Relation de dispersion

Pour trouver les relations de dispersion, il faut résoudre les équations d'onde. Étant donné qu'elles ont toutes la même forme, on s'attarde à l'équation D.35 pour montrer la procédure à suivre. La technique de la décomposition de Fourier est utilisée pour trouver une solution.

$$(u, v, w) \propto e^{i(m\theta - \omega t)} \tag{D.38}$$

La variable m est un entier qui représente le mode sur l'anneau et ω est la fréquence. On utilise les relations D.35 et D.38.

$$\begin{aligned}
\ddot{w} &= -\omega^2 w \\
w''' &= m^4 w \\
w'' &= -m^2 w
\end{aligned}$$

Donc, l'équation de dispersion est:



Figure D.7: Variation du rayon pour $m = 0$ et variation de la direction pour $m = 1$.

$$\omega^2 = m^2(m^2 - 1) \quad (\text{D.39})$$

L'équation D.39 est valable pour un anneau de rayon unitaire et il existe une similitude avec l'équation générale D.16. Si ω est réel alors l'anneau est stable. Ici, la valeur de ω est toujours réelle car le mode est un entier et l'anneau est toujours stable peu importe le mode sur l'anneau.

La fréquence (ω) est nulle lorsque $m = 0$ ou 1 et l'anneau reste circulaire sans aucune perturbation. Pour $m = 0$, le diamètre de l'anneau varie légèrement. Pour $m = 1$, c'est la position du centre de l'anneau qui varie (figure D.7). Pour $m \geq 2$, l'anneau oscille continûment selon la fréquence définie par D.39.

Relation de polarisation

C'est à partir des équations d'onde que l'on détermine les relations de polarisations pour $m \geq 2$.

$$\begin{aligned} u(m, \omega, t) &= \text{Re} \left\{ C_u e^{i(m\theta - \omega t)} \right\} \\ v(m, \omega, t) &= \text{Re} \left\{ C_v e^{i(m\theta - \omega t)} \right\} \\ w(m, \omega, t) &= \text{Re} \left\{ C_w e^{i(m\theta - \omega t)} \right\} \end{aligned}$$

Les variables C_u, C_v et C_w sont des constantes réelles ou imaginaires. On se rappelle que u est une distance radiale \mathbf{e}_r , v une distance selon l'axe \mathbf{e}_θ et w une

distance selon l'axe k qui ont toutes des valeurs réelles. Posons comme conditions initiales:

$$\begin{aligned} u(m, \omega, 0) &= C_u \cos(m\theta) \\ v(m, \omega, 0) &= C_v \sin(m\theta) \\ w(m, \omega, 0) &= 0 \end{aligned}$$

À l'attribution d'une valeur à l'une des constantes, les autres s'ajusteront afin de satisfaire les équations d'onde. Cette valeur initiale n'est pas unique et nous prenons comme valeur de départ:

$$C_u = a$$

On se réfère aux trois équations d'ondes D.34 pour trouver les deux autres constantes.

$$\begin{aligned} C_v &= -\frac{a i}{m} \\ C_w &= \frac{a i \omega}{m^2} \end{aligned}$$

Il reste maintenant à trouver la partie réelle de chacune des variables perturbatives (u, v, w) .

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \left\{ a e^{i(m\theta - \omega t)} \right\} \\ &= a \cos(m\theta - \omega t) \\ &= a [\cos(m\theta) \cos(\omega t) - \sin(m\theta) \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Une solution suffisante qui répond à la condition initiale est:

$$\boxed{u = a \cos \omega t \cos m\theta} \quad (\text{D.40})$$

L'équation D.40 est la relation de polarisation pour la perturbation u . À partir de l'équation D.34, nous trouvons les relations v et w .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= i \\ w &= \int \int [-a\omega \sin \omega t \cos m\theta] d\theta d\theta \\ \boxed{w = \frac{a\omega}{m^2} \sin \omega t \cos m\theta}\end{aligned}\tag{D.41}$$

Ce qui donne la relation de polarisation pour w .

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -w' \\ v &= \int \left[-\frac{a\omega}{m} \sin m\theta \sin \omega t\right] dt \\ \boxed{v = -\frac{a}{m} \cos \omega t \sin m\theta}\end{aligned}\tag{D.42}$$

Nous venons de déterminer chacune des composantes de la perturbation en fonction de la fréquence et du mode pour $m \geq 2$. Nous analysons le comportement des perturbations les unes par rapport aux autres en éliminant les termes en *sinus* et *cosinus* dans les expressions de u, v et w .

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} u &= \cos m\theta \cos \omega t \\ \frac{m^2}{a\omega} w &= \cos m\theta \sin \omega t \\ \left(\frac{1}{a} u\right)^2 + \left(\frac{1}{a\omega/m^2} w\right)^2 &= \cos^2 m\theta \\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{w^2}{a^2 \frac{m^2(m^2-1)}{m^4}} &= \cos^2 m\theta \\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{w^2}{a^2 \left[1 - \frac{1}{m^2}\right]} &= \cos^2 m\theta\end{aligned}$$

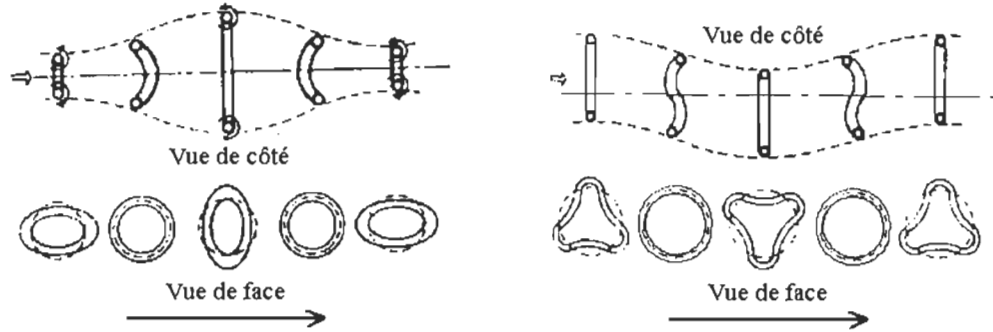


Figure D.8: Évolution des perturbations selon le mode $m = 2$ et le mode $m = 3$ (Kambe, 1971).

Nous obtenons une équation elliptique en éliminant le terme temporel pour ne conserver que la variable spatiale (θ) et la variable m . Dans les cas où $\theta = k\pi/2m$ où k prend des valeurs paires ($k = 0, 2, 4, \dots, 4m - 2$), tel que $\cos^2 m\theta = \cos^2 k\pi/2 = 1$ et on obtient une simplification supplémentaire.

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2} + \frac{w^2}{a^2 \left[1 - \frac{1}{m^2}\right]} &= 1 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Pour des valeurs paires de k , l'équation est elliptique et se rapproche de l'équation d'un cercle à mesure que le mode m augmente. De plus, il n'y a aucun mouvement selon l'axe \mathbf{e}_θ car $v = 0$. Pour les valeurs impaires de k ($k = 1, 3, \dots, 4m - 1$) les perturbations sont:

$$u = 0 \quad (\text{D.43})$$

$$v = \pm \cos \omega t \quad (\text{D.44})$$

$$w = 0 \quad (\text{D.45})$$

La figure D.8 montre l'évolution des perturbations selon deux modes spécifiques.

Invariance de la longueur du filament

La variation de la longueur locale du filament de tourbillon est exprimée par l'équation:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\theta} &= \left[1 + 2\epsilon(u + v') + \epsilon^2 |\mathbf{x}'|^2\right]^{1/2} \\ &\simeq 1 + \epsilon(u + v') + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Il est possible de vérifier que $u + v' = 0$ à partir des relations de polarisations, Par conséquent, les perturbations n'ont pas d'effets sur la variation de la longueur du filament.

APPENDICE E

STABILITÉ D'UN ANNEAU CIRCULAIRE

On a traité les perturbations sans les mettre en relation avec la notion de stabilité. Dans cet appendice, nous appliquons une perturbation sur un anneau de tourbillon circulaire afin de déterminer les modes qui sont stables et de définir les critères de stabilité selon le taux d'amplification et le mode. La perturbation employée est un sinus de faible amplitude, ce qui nous permettra de linéariser nos équations.

Nous trouverons la vitesse induite pour ce filament circulaire par la loi de Biot-Savart directement. Nous montrerons qu'un anneau de tourbillon est presque toujours instable dans un fluide idéal. Nous établirons une relation entre le rayon du filament et le nombre d'onde. Le développement est inspiré de Widnall et Sullivan (1972).

Formulation de l'analyse de stabilité

Nous utilisons la formule de Biot-Savart A.4:

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}(\mathbf{x}')}{r^3}$$

À partir de la figure E.1, nous reformulons l'équation précédente de Biot-Savart pour l'adapter à nos besoins.

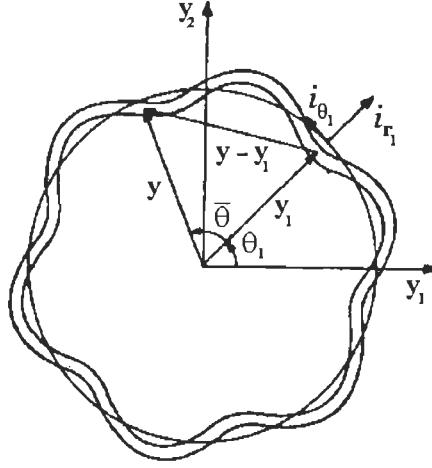


Figure E.1: Configuration et coordonnées du système pour une perturbation sinusoïdale sur un anneau de tourbillon circulaire (Widnall et Sullivan, 1972).

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{y}_1 - \mathbf{y} \\ ds(\mathbf{x}') &= dy\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{q} = \frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \times d\mathbf{y}}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3}} \quad (\text{E.1})$$

Les perturbations sont des déplacements sinusoïdaux dans la direction radiale r et axiale ζ . Nous supposons qu'il n'y a pas de composante tangentielle de la vitesse de déplacement. Un anneau circulaire, sans perturbation se déplace sous sa propre induction à vitesse constante V_0 . Dans un système de coordonnées cartésiennes se déplaçant avec le tourbillon non perturbé, les variables de position s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}y_1 &= [R + r e^{im\theta}] \cos(\theta) \\ y_2 &= [R + r e^{im\theta}] \sin(\theta)\end{aligned}$$

$$y_3 = \zeta e^{im\theta}$$

où $r = r(t)$ et $\zeta = \zeta(t)$ sont les amplitudes des perturbations axiale et radiale qui varient avec le temps et le nombre d'onde m . Le nombre d'onde est obligatoirement un entier afin que le filament de tourbillon se referme sur lui-même. D'après la figure E.1, on remarque que:

$$\theta = \theta_1 + \bar{\theta}$$

En coordonnées cylindriques $(\mathbf{e}_{r_1}, \mathbf{e}_{\theta_1}, \mathbf{k})$, le vecteur \mathbf{y}_1 sur le filament perturbé est:

$$\mathbf{y}_1 = [R + r e^{im\theta_1}] \mathbf{e}_{r_1} + \zeta e^{im\theta_1} \mathbf{k} \quad \text{où} \quad R = \text{cte} \quad (\text{E.2})$$

La vitesse de ce filament au point \mathbf{y}_1 est:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_1) = \frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{y}_1}{dt} + V_0 \mathbf{k}$$

où \mathbf{y}_t est le vecteur distance mesuré dans un système de coordonnées fixes.

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dt} = \frac{dr}{dt} e^{im\theta_1} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{d\zeta}{dt} e^{im\theta_1} \mathbf{k}$$

Les perturbations peuvent s'influencer l'une l'autre. Les équations de croissance des amplitudes des perturbations s'écrivent comme:

$$\frac{dr}{dt} = V_\zeta \zeta \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = V_r r \quad (\text{E.4})$$

Nous remplaçons ces relations dans l'expression de la vitesse induite E.1 pour donner l'équation E.5.

$$\boxed{\mathbf{q}(\mathbf{y}_1) = \zeta e^{im\theta_1} V_\zeta \mathbf{e}_{r_1} + r e^{im\theta_1} V_r \mathbf{k} + V_0 \mathbf{k}} \quad (\text{E.5})$$

Une solution pour le système d'équations en r et ζ est:

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-i\omega t} \\ \frac{dr}{dt} &= -i\omega r \\ \zeta(t) &= e^{-i\omega t} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -i\omega \zeta \end{aligned}$$

On ne s'intéresse pas à l'amplitude des perturbations que nous posons égale à l'unité et qui est faible comparativement au rayon de l'anneau. On n'étudiera pas l'impact de l'amplitude de la perturbation. On s'intéresse davantage au taux d'amplification. Si le taux est nul alors le filament est stable, sinon, il est instable. On obtient un système aux valeurs propres pour les équations E.3 et E.4.

$$\begin{bmatrix} -i\omega & -V_r \\ -V_\zeta & -i\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ r \end{pmatrix} = 0$$

La valeur propre de la fréquence ω de ce système est:

$$\boxed{\omega = -i\sqrt{V_r V_\zeta}} \quad (\text{E.6})$$

Lorsque la fréquence est imaginaire, il y a croissance exponentielle des perturbations. Si la fréquence est réelle, l'anneau oscille continuellement et est stable. C'est à partir des valeurs prises par V_ζ et V_r que l'on peut affirmer si l'anneau est stable ou non. Ainsi, l'amplitude des perturbations n'a pas d'impact sur la détermination de la stabilité. Le vecteur \mathbf{y}_1 de l'équation E.2 peut se réécrire en une partie sans perturbation et une autre avec distortion.

$$\mathbf{y}_1 = \left[R + e^{i(m\theta_1 - \omega t)} \right] \mathbf{e}_{r_1} + e^{i(m\theta_1 - \omega t)} \mathbf{k}$$

Maintenant, il reste à exprimer le vecteur \mathbf{y} en fonction des coordonnées cylindriques à partir du point \mathbf{y}_1 .

$$\mathbf{y} = [R + r e^{im\theta}] \cos(\bar{\theta}) \mathbf{e}_{r_1} + [R + r e^{im\theta}] \sin(\bar{\theta}) \mathbf{e}_{\theta_1} + \zeta e^{im\theta} \mathbf{k} \quad (\text{E.7})$$

Vitesse induite

Le calcul de la vitesse induite se fait en différentes parties séparément à partir de l'équation E.1. On exprime sous une forme plus pratique le vecteur $\mathbf{y} - \mathbf{y}_1$ des équations E.7 et E.2 par l'utilisation de trois matrices colonnes. La première matrice représente la partie non perturbative de l'anneau. La deuxième et la troisième matrices représentent les perturbations radiale r et axiale ζ . La première ligne de chaque matrice colonne est la coordonnée en \mathbf{e}_{r_1} , la deuxième est la coordonnée en \mathbf{e}_{θ_1} et la troisième en \mathbf{k} .

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_1 = \begin{Bmatrix} R(\cos \bar{\theta} - 1) \\ R \sin \bar{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \zeta e^{im\theta_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{im\bar{\theta}} - 1 \end{Bmatrix} + r e^{im\theta_1} \begin{Bmatrix} e^{im\bar{\theta}} \cos \bar{\theta} - 1 \\ e^{im\bar{\theta}} \sin \bar{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Le même procédé est utilisé pour définir le vecteur tangent $d\mathbf{y}$.

$$d\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{y}}{d\bar{\theta}} d\bar{\theta}$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\bar{\theta}} = \begin{Bmatrix} -R \sin \bar{\theta} \\ R \cos \bar{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \zeta e^{im\theta_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ im e^{im\bar{\theta}} \end{Bmatrix} + r e^{im\theta_1} \begin{Bmatrix} e^{im\bar{\theta}} (-\sin \bar{\theta} + im \cos \bar{\theta}) \\ e^{im\bar{\theta}} (\cos \bar{\theta} + im \sin \bar{\theta}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

On passe par un développement en série de Taylor au voisinage du point $r = 0$ et $\zeta = 0$ pour déterminer $1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3$.

$$\begin{aligned}
f(r, \zeta) &= f(0, 0) + f'(0, 0) \cdot [(r, \zeta) - (0, 0)] + \\
&\quad \frac{f''(0, 0)}{2} [(r, \zeta) - (0, 0)]^2 + \dots \\
f'(0, 0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)_{r=\zeta=0} \\
f(r, \zeta) &= \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3} \\
\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_{r=\zeta=0}^3} &\equiv \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0^3}
\end{aligned}$$

Nous négligeons les dérivées supérieures et le produit de perturbations:

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3} = \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0^3} + \frac{-3}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0^4} \left(\frac{\partial |\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|}{\partial r} \Big|_0, \frac{\partial |\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|}{\partial \zeta} \Big|_0 \right) \cdot [r, \zeta]$$

Évaluons les valeurs intermédiaires:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1| &= \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)^*} \\
&= \left[2R^2(1 - \cos \bar{\theta}) + Rr(1 - \cos \bar{\theta})e^{im\bar{\theta}_1}[1 + e^{im\bar{\theta}}] \right. \\
&\quad \left. + Rr(1 - \cos(\bar{\theta}))e^{-im\bar{\theta}_1}[1 + e^{-im\bar{\theta}}] + O(r^2) + O(\zeta^2) \right]^{1/2} \\
|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0 &= R\sqrt{2(1 - \cos \bar{\theta})} \\
\frac{\partial |\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|}{\partial r} \Big|_0 &= \frac{R(1 - \cos \bar{\theta})}{2|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0} \cdot \left\{ e^{im\bar{\theta}_1}(1 + e^{im\bar{\theta}}) + e^{-im\bar{\theta}_1}(1 + e^{-im\bar{\theta}}) \right\} \\
\frac{\partial |\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|}{\partial \zeta} \Big|_0 &= 0
\end{aligned} \tag{E.10}$$

La distance entre deux points sur l'anneau de tourbillon non-perturbé est $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0$.

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3} = \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0^3} \cdot \left\{ 1 + \frac{-3}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0} \frac{1}{2|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0} Rr(1 - \cos \bar{\theta}) [2e^{im\bar{\theta}_1}(1 + e^{im\bar{\theta}})] \right\}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|^3} = \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|_0^3} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{2} r e^{im\theta_1} \frac{(1 + e^{im\bar{\theta}})}{R} \right\} \quad (\text{E.11})$$

De cette expression, la partie réelle seulement est conservée en ne considérant pas la partie imaginaire parce que la définition d'un module est un nombre réel. Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer l'intégrale E.1 qui est le produit vectoriel de l'équation E.8 par E.9 multipliés par le scalaire E.11. Ce produit vectoriel donne un terme d'ordre zéro qui reflète la vitesse d'induction pour un anneau sans perturbation. Un autre de premier ordre en r et ζ qui montre le comportement de la vitesse induite causée par les perturbations qui sont les plus pertinents. Et un dernier qui est d'ordre supérieur en r et ζ dont on ne tient pas compte pour l'analyse de la stabilité. Chaque terme est traité séparément dans les prochaines sections.

Vitesse induite d'ordre zéro

La première partie des équations E.8 et E.9 représente la partie sans perturbations.

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)|_0 \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\theta}} \Big|_0 d\bar{\theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{r_1} & \mathbf{e}_{\theta_1} & \mathbf{k} \\ R(\cos \bar{\theta} - 1) & R \sin \bar{\theta} & 0 \\ -R \sin \bar{\theta} & R \cos \bar{\theta} & 0 \end{vmatrix} d\bar{\theta} \\ &= R^2(1 - \cos \bar{\theta}) d\bar{\theta} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Nous avons besoin des équations E.1, E.10 et de E.12 pour déterminer la vitesse induite sans perturbation $\mathbf{q}_0(\mathbf{y}_1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \frac{\kappa}{4\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{k} + \\ &\quad \frac{\kappa}{4\pi R^2} \left(\frac{-3}{2} r e^{im\theta_1} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + e^{im\bar{\theta}})(1 - \cos \bar{\theta})}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{k} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{k} + O(r) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Comme il fallait s'y attendre, un l'anneau circulaire sans perturbations se dirige selon l'axe des \mathbf{k} . Nous résolvons cette intégrale dans une section subséquente. De l'équation E.13, il y a un terme du premier d'ordre $O(r)$ qu'on ne considère pas pour l'instant dans l'étude sans perturbation mais dont on tiendra compte lors de la détermination de la vitesse induite de premier ordre.

Vitesse induite de premier ordre

Les vecteurs $\mathbf{y} - \mathbf{y}_1$ et $d\mathbf{y}/d\bar{\theta}$ se composent d'une partie non perturbée et d'une autre partie qui a une perturbation de premier ordre en r et ζ . Pour trouver la vitesse induite de premier ordre, il suffit de faire le produit vectoriel de la partie non perturbée de E.8 avec la partie perturbée de E.9 dans une première étape. Dans une seconde étape, il faudra faire le produit vectoriel de la partie perturbée de premier ordre de l'équation E.8 et la partie non perturbée de E.9. L'addition de ces deux produits vectoriels donne une expression de premier ordre selon les perturbations r et ζ .

PREMIÈRE ÉTAPE

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \Big|_0 \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\theta}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{r_1} & \mathbf{e}_{\theta_1} & \mathbf{k} \\ R(\cos \bar{\theta} - 1) & R \sin \bar{\theta} & 0 \\ r e^{im\bar{\theta}}(im \cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}_1) & r e^{im\bar{\theta}}(\cos \bar{\theta} + im \sin \bar{\theta}_1) & im\zeta e^{im\bar{\theta}} \end{vmatrix} e^{im\theta_1}$$

DEUXIÈME ÉTAPE

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\theta}} \Big|_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{r_1} & \mathbf{e}_{\theta_1} & \mathbf{k} \\ r e^{im\theta} \cos \bar{\theta} - r e^{im\theta_1} & r e^{im\theta} \sin \bar{\theta} & \zeta e^{im\theta} - \zeta e^{im\theta_1} \\ -R \sin \bar{\theta} & R \cos \bar{\theta} & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{E.14})$$

Un troisième terme, qui provient de la perturbation de premier ordre de \mathbf{q}_0 , s'ajoute en ne prenant pas compte de la coordonnée en \mathbf{e}_{θ_1} car cette dernière s'avère nulle lorsqu'on évalue l'intégrale. Donc, il n'y a pas de vitesse angulaire sur le filament tourbillonnaire.

La vitesse induite de premier ordre de \mathbf{q}_1 sous forme intégrale est:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 = & \frac{\kappa}{4\pi R^2} \zeta e^{im\theta_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \bar{\theta} [1 - e^{im\bar{\theta}}] + im \sin \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{e}_{r_1} \\
& \frac{\kappa}{4\pi R^2} r e^{im\theta_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\bar{\theta}} [1 - \cos \bar{\theta}] + e^{im\bar{\theta}} - \cos \bar{\theta} - im \sin \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{k} + \\
& \frac{\kappa}{4\pi R^2} r e^{im\theta_1} \frac{-3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[1 + e^{im\bar{\theta}}][1 - \cos \bar{\theta}]}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{E.15}$$

En faisant référence à l'équation E.5, il est possible de faire une correspondance directe pour trouver V_r et V_ζ qui sont nécessaire à la détermination du taux d'amplification ω .

Évaluation de l'intégrale

Les équations E.13 et E.15 ont un point de singularité lorsque $\bar{\theta} = 0$. Cette singularité est évitée en donnant une dimension au filament de tourbillon par l'intermédiaire d'un angle de coupure (δ). Cela a pour effet de séparer les intégrales en deux parties. De plus, toutes les intégrales ont la forme:

$$F(m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \tag{E.16}$$

L'exponentielle peut se séparer en deux parties (\cos et $i \sin$) et le dénominateur est une fonction paire. Alors, dans l'évaluation de l'intégrale de E.16 il ne reste que la partie en *cosinus* de l'exponentielle.

$$\begin{aligned}
F(m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\bar{\theta}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos m\bar{\theta}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta}
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Cette intégrale n'a pas de solution analytique. Une astuce est utilisée pour parvenir à la résoudre. Il s'agit d'additionner et de soustraire des fonctions $G(m)$ qui ont les mêmes singularités que $F(m)$ et qui ont des solutions numériques.

$$\begin{aligned}
 G(m) &= 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\pi} \frac{\cos m\bar{\theta}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} - \int_{\delta}^{\infty} \frac{\cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}^3} d\bar{\theta} - \frac{1}{8} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \cos m\bar{\theta} d\bar{\theta} \right] \\
 F(m) &= G(m) + 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\infty} \frac{\cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}^3} d\bar{\theta} + \frac{1}{8} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \cos m\bar{\theta} d\bar{\theta} \right] \quad (E.18)
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi introduit un angle de coupure δ qui nous permet de définir les intégrales en fonction du rayon du filament de tourbillon. La prochaine étape est de trouver une forme analytique de $F(m)$ en fonction des caractéristiques du filament tourbillonnaire.

Évaluation de $F(m)$

La fonction $G(m)$ peut être interprétée comme la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$\begin{aligned}
 f(\bar{\theta}) &= \frac{1}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} - \frac{1}{\bar{\theta}^3} - \frac{e^{-\bar{\theta}}}{8\bar{\theta}} \quad (\bar{\theta} \leq \pi) \\
 f(\bar{\theta}) &= -\frac{1}{\bar{\theta}^3} - \frac{e^{-\bar{\theta}}}{8\bar{\theta}} \quad (\bar{\theta} \geq \pi)
 \end{aligned}$$

Les valeurs de $G(m)$ pour différentes valeurs de m sont présentées au tableau E.1. Ces valeurs montrent que $G(m)$ a un effet négligeable dans le calcul de la stabilité et particulièrement lorsque la valeur de m augmente.

Maintenant, il faut trouver une solution aux intégrales qui sont présentes dans l'équation E.18. Nous présentons que les principales étapes. Plusieurs formules du livre de Ryznik (1994) ont été utilisées afin de parvenir à la résolution

Tableau E.1: Valeurs des $G(m)$ (Widnall et Sullivan, 1973).

m	$G(m)$	m	$G(m)$
0	0.454	6	0.004
1	0.073	7	0.003
2	0.025	8	0.003
3	0.012	9	0.002
4	0.008	10	0.003
5	0.005		

des intégrales. On a posé le changement de variable $z = m\bar{\theta}$. Nous commençons par l'intégrale suivante:

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^{\infty} \frac{\cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}^3} d\bar{\theta} &= \frac{\cos m\delta}{2\delta^2} - \frac{m \sin m\delta}{2\delta} - \frac{m^2}{2} \int_{m\delta}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz \\
- \int_{m\delta}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz &= \gamma + \ln m\delta + \int_0^{m\delta} \frac{\cos z - 1}{z} dz \\
&\approx \gamma + \ln m\delta \\
&\approx \gamma + \ln m + \ln \delta \\
\int_{\delta}^{\infty} \frac{\cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}^3} d\bar{\theta} &= \frac{\cos m\delta}{\delta^2} - \frac{m \sin m\delta}{\delta} + m^2[\gamma + \ln \delta + \ln m] \quad (\text{E.19})
\end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma = 0.5772$). L'intégrale suivante est beaucoup plus difficile. Nous esquissons les principales étapes où $z^2 = (1 + m^2)\bar{\theta}^2$ et on garde en mémoire que $z = (1 \pm im)\bar{\theta} = (1 + m^2)^{1/2}\bar{\theta}$.

$$\begin{aligned}
\cos \delta\bar{\theta} &= \frac{e^{i\delta\bar{\theta}} + e^{-i\delta\bar{\theta}}}{2} \\
\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}} \cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta} &= \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}(1-im)}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}(1+im)}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}(1+m^2)^{1/2}}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}(1+m^2)^{1/2}}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta} \\
&= \int_{\delta(1+m^2)^{1/2}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \\
&= -\text{Ei} \left(-\delta(1+m^2)^{1/2} \right) \\
&= -\gamma - \ln \delta(1+m^2)^{1/2} - \int_0^{\delta(1+m^2)^{1/2}} \frac{e^{-z} - 1}{z} dz \quad [\bar{\theta} \geq 0] \\
&= -\gamma - \ln \delta(1+m^2)^{1/2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\delta\sqrt{1+m^2})^k}{k \cdot k!} \quad [\bar{\theta} \geq 0] \\
&\approx -\gamma - \ln \delta(1+m^2)^{1/2} \\
&\approx -\gamma - \ln \delta - \frac{1}{2} \ln(1+m^2) \\
&\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\theta}} \cos m\bar{\theta}}{\bar{\theta}} \bar{\theta} = - \left[\gamma + \ln \delta + \frac{1}{2} \ln(1+m^2) \right] \quad (\text{E.20})
\end{aligned}$$

On peut joindre les résultats ci-dessus des équations E.19 et E.20 pour donner une forme simplifiée de $F(m)$.

$$\begin{aligned}
F(m) &= G(m) + \frac{\cos m\delta}{\delta^2} - \frac{m \sin m\delta}{\delta} + \\
&\quad m^2 [\gamma + \ln \delta + \ln m] - \frac{1}{4} [\gamma + \ln \delta + \frac{1}{2} \ln(1+m^2)]
\end{aligned}$$

Une simplification supplémentaire est possible. On développe le *cosinus* et le *sinus* en série de Taylor autour du point 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos m\delta}{\delta^2} &= \frac{1}{\delta^2} - \frac{m^2}{2!} + \frac{m^4\delta^2}{4!} + \dots \\
\frac{-m \sin m\delta}{\delta} &= -m^2 + \frac{m^4\delta^2}{3!} - \frac{m^6\delta^4}{5!} + \dots \\
\frac{\cos m\delta}{\delta^2} + \frac{-m \sin m\delta}{\delta} &\simeq \frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{2}m^2 + O(\delta^2)
\end{aligned}$$

Dans la limite où $\delta \rightarrow 0$, $F(m)$ devient:

$$F(m) \simeq G(m) + \frac{1}{\delta^2} + m^2 \left[-\frac{3}{2} + \gamma + \ln \delta + \ln m \right] - \frac{1}{4} \left[\gamma + \ln \delta + \frac{1}{2} \ln(1 + m^2) \right] \quad (\text{E.21})$$

L'équation E.21 donne une forme analytique qui s'exprime en fonction des caractéristiques du filament de tourbillon (δ, m) . Une différence de $F(m)$ implique une annulation des termes qui ne dépendent pas de m et $F(m)$ peut s'écrire comme:

$$F(m) \sim G(m) + m^2 \left[-\frac{3}{2} + \gamma + \ln \delta + \ln m \right] - \frac{1}{8} \ln(1 + m^2) \quad (\text{E.22})$$

La prochaine étape est de trouver une relation entre l'angle de coupure δ et les autres propriétés du filament tourbillonnaire. Nous utilisons l'équation de la vitesse induite sans perturbation d'un anneau circulaire \mathbf{q}_b pour y parvenir.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_b &= \frac{\kappa}{4\pi R} \left[-\ln \frac{\sigma}{8\mathcal{R}} - \frac{1}{2} + A \right] \mathbf{B} \\ A &= \int_0^a \Gamma^2 \frac{ds}{s} \\ \Gamma &\equiv \text{distribution de vortacité} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Cette équation à déjà été montrée par Lamb (1932, chap. 7) et une démonstration complète à été faite par Saffman (1970) et Fraenkel (1973). On vérifie facilement que pour une distribution uniforme $\Gamma(s) = s^2/a^2$ qui correspond à un corps rigide, on a $\Gamma(a) = 1$ et $A = 1/4$ et on retrouve la forme bien connue de Lamb.

Nous comparons l'équation \mathbf{q}_b avec \mathbf{q}_0 qu'on a développé plus tôt qui doivent être égaux. Avant tout, nous exprimons le vecteur \mathbf{q}_0 à partir de la définition de $F(m)$ (équation E.13 et E.17).

$$\mathbf{q}_0 = \frac{\kappa}{4\pi R} [F(0) - F(1)] \mathbf{k} \quad (\text{E.24})$$

Il s'agit d'introduire la relation E.22 dans E.24.

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 &= \frac{\kappa}{4\pi R} [G(0) - [G(1) - 3/2 + \gamma + \ln \delta - 1/8 \ln 2]] \mathbf{k} \\ &\simeq \frac{\kappa}{4\pi R} [\ln 4 - \ln \delta] \mathbf{k}\end{aligned}\quad (\text{E.25})$$

Maintenant, il faut faire la correspondance entre l'équation E.23 et celle de E.25 en posant:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= R + r e^{in\theta_1} = R \left[1 + \frac{r}{R} e^{in\theta_1} \right] \\ \ln 4 - \ln \delta &= -\ln \frac{\sigma}{8\mathcal{R}} - \frac{1}{2} + A \\ \ln \delta &= \ln \frac{\sigma}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{2} - A \\ &= \ln \frac{\sigma}{2R} - \ln \left(1 + \frac{r}{R} e^{im\theta_1} \right) + \frac{1}{2} - A \\ \ln \delta &\simeq \ln \frac{\sigma}{2R} - \frac{r}{R} e^{im\theta_1} + \frac{1}{2} - A\end{aligned}\quad (\text{E.26})$$

C'est la relation qui fait le lien entre l'angle de coupure δ et les propriétés du tourbillon σ, R, A et r . Alors \mathbf{q}_0 s'exprime comme:

$$\mathbf{q}_0 = V_0 \mathbf{k} + \frac{\kappa}{4\pi R^2} r e^{im\theta_1} \mathbf{k} \quad (\text{E.27})$$

$$V_0 = \frac{\kappa}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{\sigma} + A - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{E.28})$$

Donc, un petit changement de rayon génère une composante perturbative d'ordre un en r qui est ajoutée à \mathbf{q}_1 . En substituant l'équation E.26 dans E.22, on obtient une nouvelle expression de $F(m)$ strictement en fonction des paramètres du filament.

$$F(m) \sim m^2 \left[\ln \frac{\sigma m}{2R} + \gamma - 1 - A \right] - \frac{1}{8} \ln(1 + m^2) + G(m) \quad (\text{E.29})$$

L'importante relation E.29 est utilisée pour trouver la vitesse induite.

Stabilité

Pour trouver les deux variables nécessaires à la stabilité (V_ζ et V_r), on utilise les relations E.5, E.15 et E.27.

$$\begin{aligned}\frac{4\pi R^2 V_\zeta}{\kappa} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \bar{\theta} - \cos \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}} + im \sin \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} \\ \frac{4\pi R^2 V_r}{\kappa} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{im\bar{\theta}} - \cos \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}} - \cos \bar{\theta} - im \sin \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} d\bar{\theta} - \\ &\quad \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos \bar{\theta} + e^{im\bar{\theta}} - \cos \bar{\theta} e^{im\bar{\theta}}}{[2(1 - \cos \bar{\theta})]^{3/2}} \right) d\bar{\theta} + 1\end{aligned}$$

Le dernier terme “+1” provient de l’équation E.27. Pour exprimer les variables V_ζ et V_r en fonction des $F(m)$, on a besoin des relations suivantes:

$$\begin{aligned}\cos m\bar{\theta} &= \frac{e^{im\bar{\theta}} + e^{-im\bar{\theta}}}{2} \\ \cos \bar{\theta} &= \frac{e^{i\bar{\theta}} + e^{-i\bar{\theta}}}{2} \\ \sin \bar{\theta} &= \frac{e^{i\bar{\theta}} - e^{-i\bar{\theta}}}{2i}\end{aligned}$$

Avec ces dernières relations et l’équation E.16, on déduit:

$$V_\zeta = \frac{\kappa}{4\pi R^2} \left\{ F(1) - \frac{1}{2}[F(m+1) + F(m-1)] + \frac{m}{2}[F(m+1) - F(m-1)] \right\} \quad (\text{E.30})$$

$$V_r = \frac{\kappa}{4\pi R^2} \left\{ 2F(m) - \frac{1}{2}[F(m+1) + F(m-1)] - F(1) - \frac{m}{2}[F(m+1) - F(m-1)] - \frac{3}{2}[F(0) - F(1) + F(m) - \frac{1}{2}[F(m+1) + F(m-1)]] + 1 \right\} \quad (\text{E.31})$$

Pour de faible valeurs de m , il faut utiliser la définition $F(m)$ de l'équation E.29 dans les deux dernières relations pour avoir les valeurs de V_ζ et V_r . Lorsque $m \gg 1$ et $\sigma \rightarrow 0$, l'équation E.29 se simplifie et le terme dominant est proportionnel à $\ln a/R$.

$$\begin{aligned} F(m) &\simeq m^2 \left[\ln \frac{a}{R} + \ln m - \ln 2 + \gamma - 1 - A \right] - \frac{1}{8} \ln(1 + m^2) + G(m) \\ &\sim m^2 \ln \frac{a}{R} \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière équation dans E.30 et E.31, on obtient:

$$V_\zeta = \frac{\kappa}{4\pi R^2} m^2 \ln \frac{\sigma}{R} \quad (\text{E.32})$$

$$V_r = \frac{\kappa}{4\pi R^2} (1 - m^2) \ln \frac{\sigma}{R} \quad (\text{E.33})$$

Les facteurs m^2 et $1 - m^2$ ont un lien avec la courbure locale du filament du tourbillon. Plus le mode m est élevé, plus la courbure est grande localement. Le taux d'amplification E.6 pour des valeurs de m élevées est:

$$\boxed{\omega = -i \frac{\kappa}{4\pi R^2} m \sqrt{1 - m^2} \ln \frac{\sigma}{R}} \quad (\text{E.34})$$

L'anneau est stable lorsque ω est réel. Cela qui est le cas pour tout mode $m \geq 1$. Pour $m = 0$ ou 1, le taux d'amplification est nul mais ces valeurs ne satisfont pas l'approximation $m \gg 1$.

Pour une investigation complète de la stabilité de l'anneau du tourbillon, il faut utiliser l'équation E.29 pour trouver les valeurs de V_ζ et V_r . Il se produit souvent que la valeur du rayon du filament σ n'est pas négligeable et que le mode m n'a pas une valeur très grande.

La vitesse de translation induite de l'anneau (V_0) et la vitesse induite due aux perturbations (V_ζ et V_r) sont influencées par le rayon du filament σ et par la distribution de la vortacité A par la relation $-\ln \sigma/R + A$. En divisant V_0

de l'équation E.28 par $\kappa/4\pi R$, nous obtenons une équation \tilde{V} en fonction des paramètres du filament.

$$\tilde{V} = \ln \frac{8R}{\sigma} + A - \frac{1}{2} \quad (\text{E.35})$$

La variable \tilde{V} de l'équation E.35 caractérise complètement l'anneau de tourbillon. Il est à noter \tilde{V} augmente lorsque le rayon du filament σ diminue. Du côté expérimental, il est beaucoup plus facile de mesurer \tilde{V} que A et σ . Pour une distribution uniforme de circulation avec un rapport $\sigma/R = 0.1$ et pour une distribution de vitesse $U = cte$, on a $\Gamma(s) = s^2/a^2$ et on trouve la valeur maximale pour \tilde{V} qui est 4.13. Pour un tourbillon de Hill, la distribution de vitesse a approximativement la forme $U = cte(1 - s^2/a^2)^{1/2}$ et la valeur minimale de \tilde{V} est égale à 1.8. Nous pouvons rendre le taux d'amplification adimensionnel ω en le divisant par $\kappa/4\pi R^2$.

$$\bar{\omega}(\tilde{V}, m) = \frac{\omega}{\kappa/4\pi R^2} \quad (\text{E.36})$$

Pour un mode m donné, $\bar{\omega}$ est fonction de \tilde{V} seulement. Le taux d'amplification spatial ω_x est défini comme le produit du taux d'amplification ω par R/V_0 qui correspond au temps pris par l'anneau pour parcourir la distance d'un rayon.

$$\begin{aligned} \omega_x(\tilde{V}, m) &= \frac{\omega R}{V_0} \\ &= \frac{\omega R}{\tilde{V} \kappa/4\pi R^2} \\ &= \frac{\bar{\omega}(\tilde{V}, m)}{\tilde{V}} \end{aligned}$$

Nous considérons deux modèles pour prédire le rayon local le long du filament de tourbillon. Le rayon du filament est invariant dans le premier modèle et il n'y a pas de changement de longueur du filament de tourbillon.

$$\sigma = \sigma_0 \quad (\text{E.37})$$

$$\ln \frac{\sigma}{R} = \ln \frac{\sigma_0}{R} \quad (\text{E.38})$$

Dans le second modèle, le filament conserve son volume localement $\sigma^2(s)l(s)$ reste invariant et $l(s)$ est un élément de longueur.

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 l &= \sigma^2 l \\ \sigma_0^2 R d\theta &= \sigma^2 [R + r e^{im\theta_1}] d\theta \\ \sigma_0^2 &= \sigma^2 \left[1 + \frac{r}{R} e^{im\theta_1} \right] \\ \sigma^2 &= \sigma_0^2 \left[\frac{1}{1 + \frac{r}{R} e^{im\theta_1}} \right] \\ \sigma^2 &\simeq \sigma_0^2 \left[1 - \frac{r}{R} e^{im\theta_1} \right] \\ \sigma &\simeq \sigma_0 \left[1 - \frac{r}{R} e^{im\theta_1} \right]^{1/2} \\ \sigma &\simeq \sigma_0 \left[1 - \frac{r}{2R} e^{im\theta_1} \right] \quad (\text{E.39}) \\ \ln \sigma - \ln R &\simeq \ln \sigma_0 + \ln \left[1 - \frac{r}{2R} e^{im\theta_1} \right] - \ln R \\ \ln \frac{\sigma}{R} &\simeq \ln \frac{r_0}{R} - \frac{r}{2R} e^{im\theta_1} \quad (\text{E.40}) \end{aligned}$$

À volume constant, le rayon du filament est plus faible qu'avec le modèle à rayon constant. Nous analysons l'impact de ces deux modèles sur le taux d'amplification spatial en employant les équations E.34 et E.28.

$$\omega_x = -i \frac{m \sqrt{1 - m^2} \ln \sigma / R}{A - 1/2 - \ln 8 - \ln \sigma / R} \quad (\text{E.41})$$

En utilisant le modèle à volume constant, le numérateur de l'équation E.41 diminue et le dénominateur croît. Ce qui signifie que le ω_x à volume constant est plus faible que le ω_x à rayon constant. On peut affirmer que le modèle à volume constant a un effet stabilisateur. La figure E.2 montre cet effet et pour différentes valeurs de mode (m).

Pour chaque mode de déformation avec $m \geq 2$, il y a une région de \tilde{V} pour laquelle ω_x est imaginaire et qui produit une instabilité. Pour des grandes valeurs

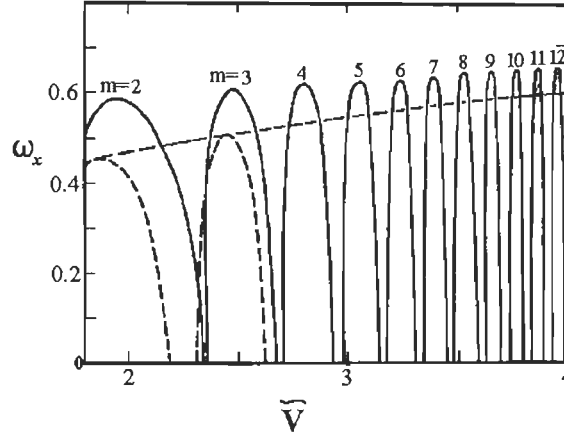


Figure E.2: Taux d'amplification spatiale ω_x en fonction de \tilde{V} et du mode m ; rayon constant: —, volume local constant: ... (Widnall et Sullivan, 1973).

de \tilde{V} , le mode instable contient plusieurs longueurs d'onde. Il faut absolument que le rayon de filament σ soit beaucoup plus petit que la longueur d'onde de la perturbation ($\simeq 2\pi R/m$) sur le filament pour que la théorie développée soit acceptable. Alors, pour de grandes valeurs de m , la longueur d'onde de la perturbation s'approche de la dimension du filament (σ) qui rend la théorie moins efficace. Malgré tout, on peut s'attendre à des résultats valides qualitativement. Les résultats sont également biaisés lorsque $\tilde{V} = 1.8$.

L'amplification spatiale et l'intervalle de \tilde{V} sont légèrement affectés par la dimension σ du tourbillon durant sa déformation pour un mode instable. La bande d'instabilité devient très étroite pour de très grandes valeurs de m . Il est possible de faire une analyse de cette limite bien que le résultat ne soit pas aussi précis que pour des modes plus faibles. Pour simplifier, on pose:

$$\ln \tilde{\sigma} = \ln \frac{\sigma}{8R} + \gamma - 1 - A$$

Pour de très grande valeur de m , la valeur de $\ln m$ ne peut plus être négligée et l'équation E.29 devient:

$$\begin{aligned}
F(m) &= m^2[\ln \tilde{\sigma} + \ln m] - \frac{1}{8} \ln(1 + m^2) + G(m) \\
&\simeq m^2 \ln \tilde{\sigma} + (m^2 - 1/4) \ln m \\
F(1) &= \ln \tilde{\sigma} \\
\frac{1}{2}[F(m+1) + F(m-1)] &\simeq (m^2 + 1) \ln \tilde{\sigma} + (m^2 + 1) \ln m - \frac{1}{4} \ln m \\
\frac{m}{2}[F(m+1) - F(m-1)] &\simeq 2m^2 \ln \tilde{\sigma} + 2m^2 \ln m
\end{aligned}$$

De ces relations, on trouve:

$$V_\zeta \simeq m^2 \ln \tilde{\sigma} + (m^2 - 1) \ln m + \frac{1}{4} \ln m \quad (\text{E.42})$$

$$V_r \simeq (1 - m^2) \ln \tilde{\sigma} - m^2 \ln m + \frac{1}{4} \ln m \quad (\text{E.43})$$

Les variables V_ζ et V_r sont fonctions de deux variables (m et $\tilde{\sigma}$). La bande d'instabilité est bornée par $V_\zeta = 0$ et par $V_r = 0$. Pour ces valeurs on a la stabilité sur l'anneau de tourbillon car l'amplification est nulle. Alors, pour un m donné, on cherche la valeur de $\tilde{\sigma}$ qui correspond à ces limites. Pour $V_\zeta = 0$ on fait correspondre la limite $\tilde{\sigma}_\zeta$ et pour $V_r = 0$ on fait correspondre la limite $\tilde{\sigma}_r$.

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{\sigma}_\zeta &\simeq \frac{-(m^2 - 1) \ln m - 1/4 \ln m}{m^2} \\
&\simeq \frac{-m^2 + \frac{3}{4}}{m^2} \ln m
\end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{\sigma}_r &\simeq \frac{m^2 \ln m - 1/4 \ln m}{1 - m^2} \\
&\simeq \frac{-m^2 - \frac{1}{4}}{m^2 - 1} \ln m
\end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Pour un m donné, on a $\tilde{\sigma}_\zeta \geq \tilde{\sigma}_r$. Mais l'écart entre $\tilde{\sigma}_\zeta$ et $\tilde{\sigma}_r$ diminue lorsque m augmente (figure E.2). Pour des valeurs de m qui sont très grandes, on a:

$$\ln \tilde{\sigma}_\zeta = \ln \tilde{\sigma}_r \simeq -\ln m = \ln \frac{1}{m} \quad (\text{E.46})$$

Donc, la dimension du filament $\tilde{\sigma}$ est inversement proportionnelle à la valeur du mode m . Ainsi, si le rayon du filament diminue, il faut s'attendre à une augmentation du mode sur l'anneau et inversement. De plus, cela veut dire qu'un anneau de tourbillon de très faible rayon σ est instable à des modes m élevés.

$$\begin{aligned} m &\simeq \frac{1}{\tilde{\sigma}} \\ \tilde{V} &\propto \ln \frac{1}{\tilde{\sigma}} \\ \tilde{V} &\propto \ln m \end{aligned} \tag{E.47}$$

On peut donc affirmer que la vitesse de translation est proportionnelle au mode selon $\ln m$.

Amplification spatiale maximale

Nous cherchons le taux d'amplification spaciae maximale. Nous savons déjà que $\tilde{\sigma}_\zeta \geq \tilde{\sigma}_r$ et $\tilde{\sigma}_\zeta = -\ln m$. Tout d'abord, il faut trouver l'intervalle entre $\tilde{\sigma}_\zeta$ et $\tilde{\sigma}_r$ où:

$$\tilde{\sigma}_\zeta + \Delta\tilde{\sigma}$$

On utilise les équations E.45 et E.45 comme point de départ.

$$\begin{aligned} \ln \tilde{\sigma}_r - \ln \tilde{\sigma}_\zeta &\simeq \frac{-\frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{4}}{m^2(m^2 - 1)} \ln m \\ \ln \frac{\tilde{\sigma}_\zeta + \Delta\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_\zeta} &\simeq -\frac{3m^2}{2m^4} \ln m \\ \ln \left(1 + \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_\zeta} \right) &\simeq \frac{-3 \ln m}{2m^2} \\ \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_\zeta} &\simeq -\frac{3 \ln m}{2m^2} \end{aligned} \tag{E.48}$$

L'équation E.48 donne la grandeur de l'intervalle qui produit une amplification pour un mode donné. On peut présumer que la valeur maximale de l'amplification se situe au centre de l'intervalle puisque les extrémités valent zéro.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{max} &= \tilde{\sigma}_\zeta \left(1 - \frac{3 \ln m}{4m^2}\right) \\ \ln \tilde{\sigma}_{max} &= \ln \tilde{\sigma}_\zeta + \ln \left(1 - \frac{3 \ln m}{4m^2}\right) \\ &\simeq \frac{-m^2 + \frac{3}{4}}{m^2} \ln m - \frac{3}{4m^2} \ln m\end{aligned}$$

Pour trouver l'amplification maximale, il faut trouver les valeurs V_ζ et V_r en employant les équations E.42 E.43 évaluées à $\tilde{\sigma}_{max}$.

$$\begin{aligned}V_\zeta &= -\frac{3}{4} \ln m \\ V_r &= -\frac{3}{4} \ln m \\ \bar{\omega} &= -i\frac{3}{4} \ln m\end{aligned}$$

En divisant par $\tilde{V} \simeq \ln m$, on obtient la limite de l'amplification spatiale ω_x pour des valeurs de m très élevées.

$$\boxed{\omega_x \simeq -\frac{3}{4} i} \quad (\text{E.49})$$

Ce résultat n'est pas particulièrement précis mais donne une limite à la valeur de l'amplification spatiale.

Effet de la viscosité sur la stabilité

Nous pouvons introduire l'effet de la viscosité pour voir son influence sur la stabilité par rapport à la dimension du filament de tourbillon. On sait par Saffman (1970) que la dimension du filament σ varie comme $\sqrt{4\nu t}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &\propto \frac{a}{R} \\
a \propto R\tilde{\sigma} &\propto \sqrt{\nu t} \\
R^2\tilde{\sigma}^2 &\propto \nu t \\
t &\propto \frac{R^2\tilde{\sigma}^2}{\nu}
\end{aligned} \tag{E.50}$$

Il serait également pertinent de connaître la variation de temps nécessaire pour que le filament passe de $\tilde{\sigma}$ à $\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}$. On trouve cette relation en appliquant la dérivée à l'équation E.50.

$$\Delta t \propto \frac{R^2\tilde{\sigma} \Delta\tilde{\sigma}}{\nu}$$

Ainsi, la dernière équation fournit le temps écoulé en fonction des paramètres du filament et de la viscosité du milieu ν . Nous exprimons la relation E.50 en fonction de l'amplification:

$$\begin{aligned}
\omega &\propto \frac{\kappa}{4\pi R^2} \ln m \\
\omega \Delta t &\propto \left(\frac{\kappa}{4\pi R^2} \ln m \right) \left(\frac{R^2\tilde{\sigma} \Delta\tilde{\sigma}}{\nu} \right) \\
&\propto \frac{\kappa}{\nu} \tilde{\sigma} \Delta\tilde{\sigma} \ln m
\end{aligned}$$

Les variables m et $\Delta\tilde{\sigma}$ sont éliminées en employant les relations E.47 et E.48.

$$\begin{aligned}
\ln m &\simeq -\ln \tilde{\sigma} \\
m &\simeq \frac{1}{\tilde{\sigma}} \\
\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}} &\simeq -\frac{3}{2m^2} \ln m \\
&\simeq \frac{3}{2\frac{1}{\tilde{\sigma}^2}} \ln \tilde{\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\sigma} &\simeq \frac{3}{2} \tilde{\sigma}^3 \ln \tilde{\sigma} \\
\omega \Delta t &\propto \frac{\kappa}{\nu} (\ln \tilde{\sigma})^2 \tilde{\sigma}^4 \\
&\propto Re (\ln \tilde{\sigma})^2 \tilde{\sigma}^4 \quad \text{où} \quad Re = \kappa/\nu
\end{aligned}$$

Pour des modes élevés, nous avons une manière qualitativement valable pour estimer le taux d'amplification. La viscosité a un effet stabilisateur sur l'anneau de tourbillon. Plus la viscosité est grande et plus on dispose de temps pour observer un mode élevé. On sait que la dimension du filament affecte directement le mode sur l'anneau de tourbillon. La viscosité influence la dimension du filament de l'anneau en l'augmentant avec le temps (équation E.50). Par conséquent, la viscosité a tendance à diminuer le mode sur l'anneau. Plus le nombre de Reynolds Re est élevé pour un milieu donné, plus la circulation est grande, plus le filament est petit et plus la vitesse de translation est grande. Cela permet d'observer des modes plus élevés mais on dispose de moins de temps pour le faire car l'instabilité détruit le filament très rapidement. Donc, pour des nombres de Reynolds très élevés, la viscosité n'a pas le temps de stabiliser l'anneau.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- Akhmetov, D.G. 1980. *Extinguishing Gas and Oil Well Fires by Means of Vortex Rings*, Combust. Explos. Shock Waves, vol. 16, p. 490-494.
- D.W. Appel, P.G. Hubbard et al. 1959. *Advanced Mechanics of Fluids*, John Wiley and Sons.
- Auerbach, David. 1987. *Experiments on the Trajectory and Circulation of the Starting Vortex*, J. Fluid Mech., vol. 183, p. 185-198.
- Batchelor, G.K. 1987. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. Chap.7.
- Blondeaux, P., De Bernardinis, P. 1983. *On the Formation of Vortex Pairs Near Orifices*, J. Fluid Mech., vol. 135, p. 111-122.
- Chahine, G.L., Genoux, P.F. 1983. *Collapse of a Cavitating Vortex Ring*, J. Fluids Eng, vol. 105, p. 400-405.
- Crow, S.C. 1970. *Stability Theory for a Pair of Training Vortices*, AIAA J., vol. 8, p. 2172-2179.
- Didden, N. 1979. *On the formation of vortex rings: rolling-up and production of circulation*, Z. Angew. Math. Phys., vol. 30, p. 101-116.
- Florent, P. et al. 1981. *Calcul Vectoriel, Géométrie Analytique*, Presses de l'Université du Québec. Tome 2.
- Fohl, T., Turner, J.S. 1975. *Colliding Vortex Rings*, Physics of Fluids, vol. 18, p. 433-436.

- Fraenkel, L.E. 1973. *Examples of Steady Vortex Rings of Small Cross-Section in an Ideal Fluid*, J. Fluid Mech., vol. 51, p. 119-135.
- Glezer, Ari. 1988. *The Formation of Vortex Rings*, Phys. Fluids, vol. 31, p. 3532-3542.
- Hama, Francis R. et Nutant, John. 1960. *Self-Induced Velocity on a Curved Vortex*, Physics of Fluids, vol. 4, p. 28-32.
- Hama, Francis R. 1962. *Progressive Deformation of a Curved Vortex Filament by its Own Induction*, Physics of Fluids, vol. 5, p. 1156-1162.
- Hama, Francis R. 1963. *Progressive Deformation of a Perturbed Line Vortex Filament*, Physics of Fluids, vol. 6, p. 526-534.
- Hama, Francis R. et Arms, R.J. 1965. *Localized-Induction Concept on a Curved Vortex and Motion of an Elliptic Vortex Ring*, Physics of Fluids, vol. 8, p. 553-559.
- Helmholtz, H. 1858. *On Integrals of the Hydrodynamical Equations which Express Vortex-Motion*, traduit par Tait, P.G. en 1867 dans: London Edinburgh Dublin Phil. Mag., vol. 33, p. 485-512.
- Hurley, James F. 1980. *Intermediate Calculus*, Saunders College Philadelphia.
- Ishii K., Kuwahara K., Liu C.H. 1993. *Navier-Stokes Calculations for Vortex Rings in an Unbounded Domain*, Computers Fluids, vol. 22, p. 589-605.
- Kambe, T. et Takao, J. 1971. *Motion of Distorted Vortex Rings*, J. Phys. Soc. Jpn., vol. 3, p. 591-599.
- Kambe, T., Minota, T. 1983. *Acoustic Wave radiated by Head-on Collision of Two Vortex Ring*, Proc. R. Soc. London Ser. A, vol. 386, p. 277-308.
- Thomson, Sir W. (Lord Kelvin) 1867. *On vortex motion*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. 25, p. 217-260.

- Thomson, Sir W. (Lord Kelvin) 1867. *On vortex atoms*, Phil. Mag., vol. 34, p. 15-24.
- Thomson, Sir W. (Lord Kelvin) 1880. *Vibrations of a Columbar Vortex*, Mathematical and Physics Papers, Cambridge University Press, vol. 4, p. 152-165.
- Kida S., Takaoka M., Hussain F. 1989. *Reconnection of Two Vortex Rings*, Phys Fluids A, vol. 1, p. 630-632.
- Kida S., Takaoka M., Hussain F. 1991. *Collision of Two Vortex Rings*, J. Fluid Mech., vol. 230, p. 583-646.
- Krutzsch, Von Carl-Heinz. 1939. *Über eine experimentell beobachtete Erscheinung an Wirbelringen bei ihrer translatorischen Bewegung in wirklichen, Flüssigkeiten*, Annln Physik, vol. 5, p. 497-523.
- Kundu, Pijush K. 1990. *Fluid Mechanics*, San Diego, Calif.: Academic Press.
- Lamb, H. 1932. *Hydrodynamics*, Chap. 7. New York: Dover 6th ed.
- Maxworthy, T. 1972. *The Structure and Stability of Vortex Ring*, J. Fluid Mech., vol. 51, p. 15-32.
- Maxworthy, T. 1974. *Turbulent Vortex Ring*, J. Fluid Mech., vol. 64, p. 227-239.
- Maxworthy, T. 1977. *Some Experimental Studies of Vortex Ring*, J. Fluid Mech., vol. 81, p. 465-495.
- McWilliams, James C. 1984. *The Emergence of Isolated Coherent Vortices in Turbulent Flow*, J. Fluid Mech., vol. 146, p. 21-43.
- McWilliams, J.C. 1983. *Interactions of Isolated Vortices*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, vol. 24, p. 1-22.
- McWilliams, J.C., Zabusky, N.J. 1982. *Interactions of Isolated Vortices*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, vol. 19, p. 207-227.
- Melander, M.V., Zabusky, N.J., McWilliams, M.V. 1988. *Symmetric Vortex*

- Merger in Two Dimensions: Causes and Conditions*, J. Fluid Mech., vol. 195, p. 303-340.
- Melander, M.V., Hussain, F. 1989. *Cross-Linking of Two Antiparallel Vortex Tubes*, Phys. Fluids, vol. A1(4), p. 633-635.
- Minota, T., Kambe, T., Murakami, T. 1988. *Acoustic Emission from Interaction of a Vortex Ring with a Sphere*, Fluid Dyn. Res., vol. 3, p. 357-362.
- Moore, D.W., Saffman, P.G. 1971. *Structure of a Line Vortex in an Imposed Strain*, Aircraft Wake Turbulence and Its Detection, p. 339-354.
- Nitsche, M., Krasny, R. 1994. *A Numerical Study of Vortex Ring Formation at the Edge of a Circular Tube*, J. Fluid Mech., vol. 276, p. 139-161.
- Pullin, D.I. 1979. *Vortex Generation at Tube and Orifice Openings*, Phys. Fluids, vol. 22, p. 401-403.
- Pullin, D.I., Perry, A.E. 1980. *Some Flow Visualization Experiments on the Starting Vortex*, J. Fluid Mech., vol. 97, p. 239-255.
- Ryhming, Inge L. 1991. *Dynamique des fluides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 2th ed.
- Ryznik et Gradshteyn 1994. *Table of Integrals, Series, and Products*, Alan Jeffrey, Editor. 5th ed.
- Saffman, P.G. 1970. *The Velocity of Viscous Vortex Rings*, Studies in Applied Mathematics., vol. 49, p. 370-380.
- Saffman, P.G. 1978. *The Number on Unstable Vortex Rings*, J. Fluid Mech., vol. 84, p. 625-639.
- Saffman, P.G. 1981. *Dynamics of Vorticity*, J. Fluid Mech., vol. 106, p. 49-58.
- Spiegel, Murray R. 1979. *Analyse Vectorielle*, Série Schaum, McGraw-Hill.
- Sfeir, A.A. 1979. *Investigation of Three-Dimensional Turbulent Rectangular Jets*,

- AIAA Journal, vol. 17, p. 1055-1060.
- Shariff, K., Leonard, A. 1992. *Vortex Rings*, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 24, p. 235-79.
- Tsuchiya, Y., Horikoshi, C. 1986. *On the Spread of Rectangular Jets*, Experiments in Fluids, vol. 4, p. 197-204.
- Tung, C. Ting, L. 1967. *Motion and Decay of a Vortex Ring*, Phys. Fluids, vol. 10, p. 901-910.
- Turner, J.S. 1960. *On the intermittent release of smoke from chimneys*, Mech. Engng. Sci., vol. 2, p. 356.
- Voropayev, S.I. Afanasyev, Ya.D. 1992. *Two-Dimensional Vortex-Dipole Interactions in a Stratified Fluid*, J. Fluid Mech., vol. 236, p. 665-689.
- Widnall, Sheila. E. et Sullivan, J.P. 1973. *On the Stability of Vortex Rings*, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 332, p. 335-353.
- Widnall, S.E., Bliss, D., Tsai, C. 1974. *The Instability of Short Waves on a Vortex Ring*, J. Fluid Mech., vol. 66, p. 35-47.
- Widnall, S.E., Bliss, D., Zelay, A. 1970. *Theoretical and Experimental Study of the Stability of a Vortex Ring*, Proceeding Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Seattle, Washington, p. 305-338.